



## Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale

Bryder, Kaj L; Nielsen, Mogens Peter

*Publication date:*  
1979

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Bryder, K. L., & Nielsen, M. P. (1979). *Optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale*. Technical University of Denmark. BYG-Rapport No. R-117

---

### General rights

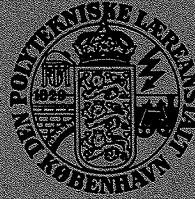
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE



STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY  
TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK

Kaj L. Bryder

OPTIMERINGSMETODER FOR 2-DIMENSIONALE  
LEGEMER AF IDEAL-PLASTISK MATERIALE

RAPPORT NR. R 117 1979

OPTIMERINGSMETODER FOR 2-DIMENSIONALE  
LEGEMER AF IDEAL-PLASTISK MATERIALE

- Specielt bestemmelse af bæreevne/  
armeringsbehov for jernbetonskiver  
samt bæreevne for stribefundamenter. -

1979

Kaj L. Bryder



## RESUMÉ

Nærværende afhandling omhandler numeriske optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale. Der gives dels en historisk oversigt, dels udvikles to nye metoder på basis af nedreværdiprincippet. Disse fastlægger plane, statisk tilladelige spændingsfordelinger ved anvendelse af henholdsvis en elementmetode og en differensmetode. Flydebetingelserne lineariseres, og optimale løsninger for bæreevne eller materialebehov bestemmes ved lineær programmering.

De udviklede metoder benyttes ved bestemmelse af dels bæreevne/arme-ringsbehov for jernbetonskiver, dels bæreevne for stribefundamenter. Metoden baseret på differensligninger udviser de bedste resultater og synes velegnet til formålet.

## SUMMARY

This report deals with computer optimization methods for 2-dimensional continuums of ideal-plastic material. A historical survey is given and two new methods are developed on the basis of the lower-bound theorem. The methods define statically admissible plane stress fields by using respectively a finite element method and a finite difference method. The yield conditions are linearized, and optimal solutions for limit loads or design are found by using linear programming.

The developed methods are applied when deciding limit loads or optimal design of reinforced concrete constructions with plane stress and when deciding limit loads of strip-footings. The method based on finite difference equations is found very suitable and gives the best results.

FORORD

Denne rapport er udarbejdet som led i betingelserne for erhvervelse af den tekniske licentiatgrad. Rapporten er, bortset fra rettelse af småfejl og tilføjelse af en sammenligning med armeringsbehov bestemt på grundlag af en elastisk spændingsfordeling (kap. II, eksempel 3), identisk med den egentlige licentiatafhandling.

Licentiatarbejdet er udført ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Danmarks tekniske Højskole med professor, dr. techn. Mogens Peter Nielsen som faglærer. Som censor har virket professor, dr. techn. Jan Bäcklund, Linköpings Tekniska Högskola. Afsluttende licentiatforelæsning holdt d. 2. november 1978.

Tegning og maskinskrivning af rapporten er udført af kontorpersonale ved Afdelingen for Bærende Konstruktioner.

Til alle involverede personer rettes en tak.

Marts 1979

Kaj L. Bryder

### III

#### INDHOLDSFORTEGNELSE

	Side
<u>INTRODUKTION</u>	1
<u>KAP. I OPTIMERINGSMETODER FOR 2-DIMENSIONALE LEGEMER AF IDEAL-PLASTISK MATERIALE</u>	5
1. MATERIALER MED IDEAL-PLASTISK OPFØRSEL	5
1.1 Materialeopførsel i brudtilstanden	5
1.2 Ideal-plastiske materialer	7
1.2.1 Flydebetingelse og flydelov	8
1.2.2 Ekstremalprincipper	9
2. BESTEMMELSE AF BÆREEVNE/MATERIALEBEHOV FOR IDEAL-PLASTISKE LEGEMER	11
2.1 Optimeringsmetoder for bærende konstruktioner	11
2.1.1 Optimeringsmetoder for bestemmelse af bæreevne/materialebehov	11
2.1.2 Optimeringsmetoder på ideal-plastisk grundlag	12
2.2 Numeriske optimeringsmetoder for bærende konstruktioner, når nedreværdiprincippet benyttes	19
2.3 Statisk tilladelige spændingsfordelinger for skiver	20
2.3.1 Metoder til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger	20
2.3.2 Ligevægtsligninger	22
2.3.3 Ligevægts-elementmetoden (ELLI)	24
2.3.4 Spændingsfunktions-differensmetoden (DILI)	36
2.3.5 Rangbestemmelse	43
2.4 Statisk tilladelige spændingsfordelinger for plader og skaller	47
2.5 Sikre spændingsfordelinger	48
2.6 Optimeringsmetoder	50
2.6.1 Optimering og optimeringsmetoder	50
2.6.2 Lineær programmering	53
2.7 De numeriske metoder og vurdering	55
2.7.1 De numeriske metoder	55
2.7.2 Vurdering af metoderne	58
<u>KAP. II BESTEMMELSE AF BÆREEVNE/ARMERINGSBEHOV FOR JERNBETONSKIVER OG -SKALLER</u>	61
1. JERNBETONSKIVER OG -SKALLER OG DERES BÆREEVNE/ARMERINGSBEHOV	61
1.1 Jernbetonkonstruktioners bæreevne/armeringsbehov	63
1.2 Metoder til bestemmelse af bæreevne/armeringsbehov for jernbetonskiver og -skaller	

	Side
1.2.1 Sædvanlige metoder	63
1.2.2 Numeriske optimeringsmetoder på ideal-plastisk grundlag	65
2. FLYDEBETINGELSER FOR JERNBETONSKIVER OG -SKALLER	66
2.1 Jernbetons fysiske opførsel	67
2.2 Jernbetonskiver og -skaller som ideal-plastiske legemer	68
2.2.1 Jernbeton som ideal-plastisk materiale	68
2.2.2 Flydebetingelse og deformationsforhold for skiver	69
2.2.3 Flydebetingelser og deformationsforhold for plader og skaller	73
3. OPTIMERING AF BÆREEVNE/ARMERINGSBEHOV FOR JERNBETONSKIVER OG -SKALLER	76
3.1 Anvendelse af de udviklede numeriske optimeringsmetoder ved jernbetonskiver og -skaller	76
3.1.1 Skiver	76
3.1.2 Lineariserede skiveflydebetingelser	78
3.1.3 Plader og lineariserede pladeflydebetingelser	87
3.1.4 Skaller og lineariserede skalflydebetingelser	88
3.2 Andre numeriske optimeringsmetoder for jernbetonskiver	90
4. JERNBETONSKIVE-EKSEMPLER	92
4.1 Eksempel 1: Kvadratisk, kontinuert belastet jernbetonskive	93
4.2 Eksempel 2: Kvadratisk, diskontinuert belastet jernbetonskive	95
4.3 Rektangulære jernbetonskiver, der virker som høje bjælker	98
4.4 Eksempel 3: Kort jernbeton-bjælkeskive ( $\sigma_c = \infty$ )	99
4.5 Eksempel 4: Jernbeton-bjælkeskiver med konstant moment ( $\sigma_c = \infty$ )	104
4.6 Eksempel 5: Jernbeton-bjælkeskiver med konstant belastning	110
KAP. III BESTEMMELSE AF BÆREEVNE FOR STRIBEFUNDAMENTER PÅ JORD	115
1. STRIBEFUNDAMENTER OG DERES BÆREEVNE	115
1.1 Fundamenters bæreevne	115
1.2 Metoder til bestemmelse af stribefundamenters bæreevne	115



	Side
2. FLYDEBETINGELSER FOR JORD	118
2.1 Jordarternes fysiske opførsel	118
2.2 Jordlegemer som ideal-plastiske legemer	119
2.2.1 Jordarterne som ideal-plastiske materialer	119
2.2.2 Coulomb's flydebetingelse	121
3. OPTIMERING AF BÆREEVNE FOR STRIBEFUNDAMENTER	126
3.1 Statiske forhold ved stribefundamenter	126
3.2 Anvendelse af de udviklede numeriske optimeringsmetoder ved stribefundamenter	131
3.2.1 Stribefundamenter	131
3.2.2 Lineariserede Coulomb-flydebetingelser	132
3.3 Andre geotekniske anvendelser af de numeriske optimeringsmetoder	135
4. STRIBEFUNDAMENT-EKSEMPLER	136
4.1 Stribefundament på halvuendeligt jordlegeme	137
4.1.1 Eksempler	137
4.1.2 Ligevægts-elementmetode eksempler (ELLI)	138
4.1.3 Spændingsfunktions-differensmetode eksempler (DILI)	142
4.2 Eksempel 1: Stribefundamenters bæreevne på vægtløs jord ( $\gamma = 0$ , $\varphi \neq 0$ , $c \neq 0$ )	145
4.3 Eksempel 2: Stribefundamenters bæreevne på vægtløs og friktionsløs jord ( $\gamma = 0$ , $\varphi = 0$ , $c \neq 0$ )	152
4.4 Eksempel 3: Stribefundamenters bæreevne på jord ( $\gamma \neq 0$ , $\varphi \neq 0$ , $c \neq 0$ )	154
4.5 Eksempel 4: Stribefundamenters bæreevne på kohæsionsløs jord ( $\gamma \neq 0$ , $\varphi \neq 0$ , $c = 0$ )	159
KONKLUSION	171
REFERENCELISTE	173
APPENDIX	184
APPENDIX 1: Lineariserede flydebet. for jernbetonskiver	184
APPENDIX 2: Lineariserede flydebet. ved stribefundamenter	186

SYMBOLLISTE M.M.Symboler (de vigtigste)

$x, y$	koordinataksler i retvinklet koordinatsystem
$u, v$	koordinataksler i skævvinklet koordinatsystem
$n, s$	koordinataksler i retvinklet, lokalt koordinatsystem
$\nu, \psi, \xi, \theta$	koordinatvinkler
$t$	tykkelse
$A$	areal
$b, l$	bredde, længde
$\epsilon$	tøjning
$\sigma$	spænding
$\epsilon_x, \epsilon_y$	normaltøjninger
$\gamma_{xy}$	vinkeltøjning (deviation)
$\sigma_x, \sigma_y$	normalspændinger
$\tau_{xy}$	forskydningsspænding
$N_x, N_y$	normalkræfter
$N_{xy}$	forskydningskraft
$M_x, M_y$	bøjende momenter
$M_{xy}$	vridende moment
$p_u, p_v$	volumenkræfter
$p_i$	bæreevneparametre (linielast)
$\beta_i$	element-parametre
$U, U_i$	spændingsfunktion, spændingsfunktionsparametre
$x_i, y_i$	variable parametre
$f$	flydebetingelsesfunktion
$K$	armeringskraft
$K_i$	armeringsparametre (spændingsbidrag fra armering)

F	armeringsbehov (spænding x volumen)
$\phi_x, \phi_y$	armeringsgrader ( $\phi_i = \frac{K_i}{\sigma_c t}$ )
$\sigma_b$	betonspænding
$\sigma_c$	betonstyrke (trykstyrke)
$\sigma_F$	armeringens flydespænding (trækstyrke)
$\varphi$	friktionsvinkel
c	kohæsion
$\gamma$	rumvægt

### Specielle benævnelser

ELLI-metoden: Numerisk optimeringsmetode, der er baseret på ligevægts-elementmetoden og lineær programmering. Udledes i kap. I, afs. 2.

DILI-metoden: Numerisk optimeringsmetode, der er baseret på spændings-funktions-differensmetoden og lineær programmering. Udledes i kap. I, afs. 2.

MP (NEUCC-maskinpoint): Beregningsenhed for maskinforbrug, der primært er afhængig af CPU-tid og lagerbehov. I 1976, hvor hovedparten af beregningerne blev udført, var "normalprisen" pr. MP 3000 kr).



## INTRODUKTION

I denne afhandling er numeriske optimeringsmetoder for 2 - dimensionale legemer af ideal-plastisk materiale behandlet. Metoderne kan benyttes dels ved bæreevnebestemmelse, dels ved materialebehovsbestemmelse. I det første tilfælde haves kendskab til et legemes geometri og dets materialeopbygning, og en eller flere belastningsparametre ønskes maximeret. I det andet tilfælde, der er et dimensioneringsproblem, ønskes materialebehovet minimeret, idet givne belastningspåvirkninger skal kunne optages.

Ved de udledte metoder er hovedvægten lagt på skiver og rumlige legemer (massiver) med plan deformationstilstand. Herudover er metodernes anvendelse på skaller omtalt.

I kap. I er teorien for ideal-plastiske materialer gennemgået kort. Det fremgår heraf, at man ved bæreevne - eller materialebehovsbestemmelse kan benytte de såkaldte ekstremalprincipper som grundlag. Når nedreværdiprincippet benyttes, kan udledes metoder, der angiver løsninger på den sikre side (en beregnet bæreevne er mindre end eller lig den virkelige), mens øvreværdiprincippet giver løsning på den usikre side (en beregnet bæreevne er større end eller lig med den virkelige). Nedreværdimetoden kræver opfyldelse af de statiske ligevægtsbetingelser, og desuden må spændingerne tilfredsstille materialets flydebetingelse.

Ved udvikling af metoder, der sikrer statisk tilladelige spændingsfordelinger, er det en mulighed at betragte forholdene ved elastiske løsninger, idet en elastisk løsning også må tilfredsstille ligevægtsbetingelserne. Den elastiske løsning kan derfor benyttes som en mulig statisk tilladelig løsning ved et plastisk problem, omend den ofte vil give løsninger meget på den sikre side. Den elastiske løsning kan enten bestemmes ved analytiske eller numeriske metoder. De sidstnævnte vil normalt være

elementmetoder eller differensmetoder.

Den mest benyttede variant af elementmetoden er kompatibilitets- eller deformationsmetoden. De geometriske betingelser opfyldes ved at benytte passende parametriske flytningsfordelinger, der gør det muligt at sikre kontinuitet i flytningerne mellem elementerne. Ligevægtsbetingelserne sikres opfyldt tilnærmelsesvis ved anvendelse af enten det virtuelle arbejdes princip eller variationsprincippet om stationær potentiel energi.

Når nedreværdiprincippet anvendes ved plastiske beregninger kan ovenstående metode ikke danne grundlag for en mere generel metode.

Siden 1960'erne har man arbejdet med såkaldte ligevægtsmetoder, hvor der i stedet er beskrevet spændings- eller snitkraftfordelinger i elementerne, som sikrer at ligevægtsbetingelserne er tilfredsstillede. Deformationsbetingelserne for det elastiske legeme opfyldes tilnærmeth ved anvendelse af variationsprincippet om stationær komplementær energi. Denne metode er brugbar ved plastiske legemer, når alene ligevægtsdelen benyttes. Dette skyldes, at de statiske ligevægtsbetingelser er tilfredsstillede samtidig med, at spændingsfordelingen kan varieres. Herved kan den fordeling, der er mest fordelagtig for en plastisk løsning bestemmes. For plane tilfælde udnyttes dette ved ELLI-metoden.

Alternativt kan man benytte differensmetoder baseret på spændingsfunktioner. I det plane skivetilfælde kan spændingerne således udtrykkes ved Airy's spændingsfunktion, hvorved de indre statiske ligevægtsbetingelser automatisk bliver opfyldt. De statiske randbetingelser bestemmer spændingsfunktionen og dens afledede på randen. Hermed er alle statiske betingelser tilfredsstillet, og metoden kan umiddelbart benyttes ved den plastiske beregning- (DILLI-metoden). I det elastiske tilfælde skal yderligere deformations- eller kompatibilitetsbetingelserne tilfredsstilles, hvilket fører til en 4. ordens differential-ligning (den biharmoniske ligning).

Hermed er angivet 2 metoder til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger. Ved en nedreværdiløsning for det idealplastiske problem skal det nu yderligere sikres, at materialets flydebetingelse er opfyldt overalt. Ved eliminering af ligevægtsafhængige spændingsvariable kan en delmængde af statisk tilladelige løsninger angives. De, der samtidig sikrer, at flydebetingelserne er opfyldt overalt, benævnes sikre løsninger. Sådanne løsninger kan bestemmes, når flydebetingelserne er givet på numerisk form.

Blandt alle sikre løsninger er vi interesseret i at finde netop den eller de løsninger, der giver største bæreevne eller mindste materialebehov.

Dette er et optimeringsproblem, hvortil forskellige optimeringsmetoder kan anvendes. Kan problemet gøres lineært, er "lineær programmering" en meget effektiv og velafprøvet metode. Da det er relativt enkelt at linearisere flydebetingelserne, og da såvel ligevægtsrestriktionerne som optimeringsfunktionen (udtryk for bæreevne eller materialebehov) er lineære, er denne metode umiddelbart anvendelig og fundet mest velegnet. Linearisering af flydebetingelserne bevirker ganske vist en vis afrundingsfejl, men ved passende valg af de lineære udtryk vil denne være uden betydning.

I kap. II er de udledte metoder primært anvendt på jernbetonskiver, men en anvendelse mere generelt på jernbetonskaller er kommenteret.

Det primære sigte med de udledte metoder har været, at bestemme minimale armeringsbehov for jernbetonskiver, idet dette problem normalt ikke kan løses på anden vis. En forudsætning herfor er imidlertid, at jernbeton i brudtilstanden kan betragtes som havende idealplastisk opførsel. Dette er i en lang række tilfælde godtgjort at være en rimelig tilnærmelse.

En anden anvendelse af metoderne er givet i kap. III, hvor de er anvendt ved bæreevnebestemmelse for et stribefundament. Dette i grunden 3 - dimensionale problem kan vises kun at være afhængig af spændingstilstanden i et 2 - dimensionalt legeme, og kan derfor løses ved den udviklede teknik.

Herudover kan metoderne naturligvis benyttes ved andre idealplastiske legemer, der kan karakteriseres ved en plan spændings- eller deformationstilstand.

Den konklusion, der kan drages af metodernes anvendelse på eksemplerne i kap. II og III, er, at differensmetoden normalter langt den mest fordelagtige, når legemet er rektangulært. Ved ikke rektangulære legemer er metoden imidlertid mindre velegnet. Dette har dog ikke nogen praktisk betydning, da langt de fleste geometriske afgrænsninger er rektangulære, eller kan tilnærmes denne form.

Ved anvendelse af denne metode på stribefundamenter er bortset fra tilfældet med kohæsionsløs jord bestemt gode og præcise løsninger iflg. sammenligning med analytiske løsninger. Da der endvidere let kan tages hensyn til variable styrkeparametre, synes metoden derfor velegnet til løsning af såvel teoretiske som praktiske problemer indenfor dette felt.

Anvendelsen af metoden ved armerings- og bæreevnebestemmelse for jernbetonskiver giver også i mange tilfælde gode resultater. Men da løsningerne ofte indeholder meget voldsomme diskontinuiteter i spændingsfordelingen, er der konstateret en del vanskeligheder med tilpasningen, hvilket bevirker et lidt for stort armeringsbehov. Armeringsbehovet er dog betydelig mindre end, hvad en elastisk løsning giver.



## KAPITEL I. OPTIMERINGSMETODER FOR 2 - DIMENSIONALE LEGEMER AF IDEAL-PLASTISK MATERIALE.

### 1. MATERIALER MED IDEAL-PLASTISK OPFØRSEL.

De udviklede optimeringsmetoder er baseret på teorien for ideal-plastiske materialer. Derfor er i det følgende opridset de vigtigste egenskaber og karakteristika for ideal-plastiske materialer. Det, der især vil blive benyttet, er materialernes flydebetingelse og nedreværdprincippet.

#### 1.1 Materialeopførsel i brudtilstanden.

Når et givet konstruktionselement skal vurderes, er man i praksis interesseret i dels dets deformationsforhold ved de normale brugsbelastninger ~ brugstilstanden, og dels i dets bæreevne når det er belastet til brud ~ brudtilstanden. I denne afhandling vil kun sidstnævnte problemer blive behandlet. Forinden skal konstruktionselementets fysiske opførsel under hele belastningsfasen fra ubelastet tilstand til brudtilstand dog kort omtales.

Et legemes fysiske opførsel for en sådan belastningsvariation beskrives f.eks. ved at angive tøjningsvariationen udtrykt ved spændingerne eller omvendt. For en sammenhørende spændingsstørrelse og tøjningsstørrelse kan optegnes en arbejdslinie som vist på fig. 1.1.a. Da materialerne sædvanligvis har en ikke-lineær arbejdslinie, benytter man som regel visse tilnærmelser. De vigtigste af disse er vist på fig. 1.1.b-e, idet det naturligvis gælder, at man benytter den tilnærmelse, der passer bedst til den pågældende arbejdslinie og til beregningsmetoden.

I brudfasen skelner man mellem enten et sprødt eller et sejt brud - se fig. 1.2. Sidstnævnte giver anledning til flydning i materialet, og benævnes ofte et flydebrud. Ved et materiale, der flyder, vil de store deformationer i brudfasen bevirke, at der først opstår egentligt globalt brud, når der er dannet en meka-

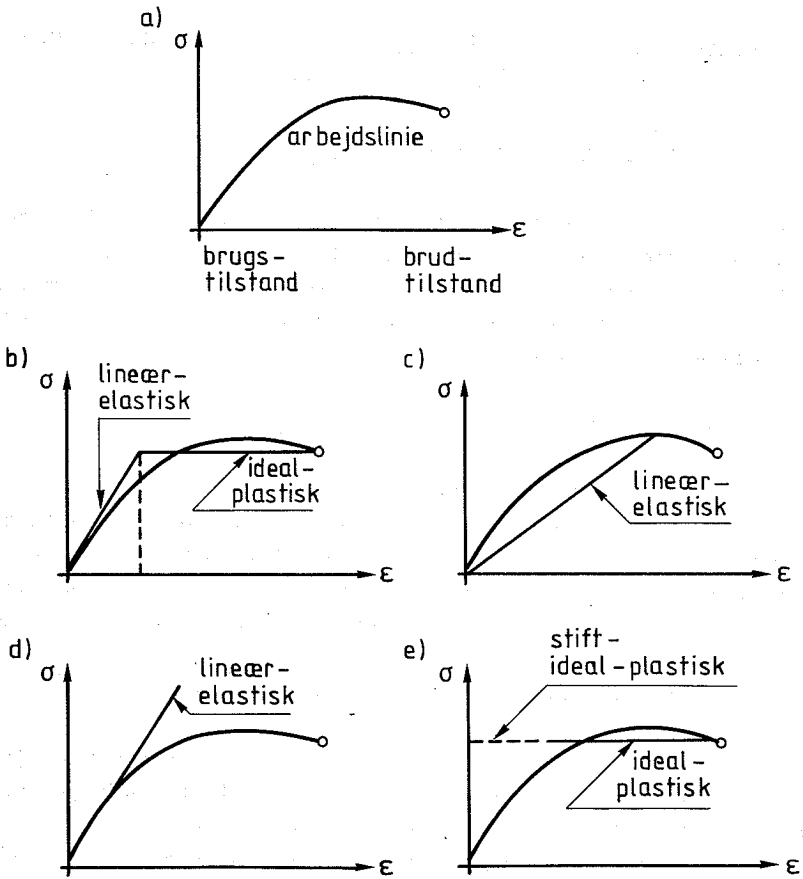


Fig. 1.1.a-e Arbejdslinie og tilnærmelser.

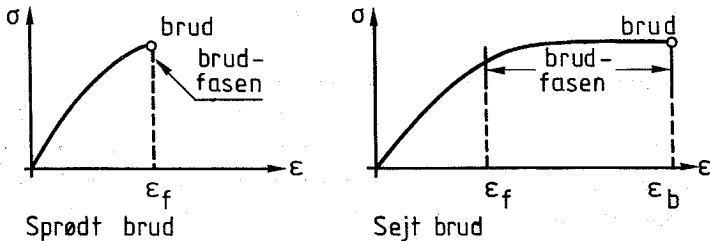


Fig. 1.2 Sprødt og sejt brud.

nisme. I modsætning hertil vil et lokalt, skørt brud sædvanligvis bevirke globalt brud. Materialer der flyder, således at der er vandret tangent på arbejdslinien, benævnes ideal-plastiske. Er tøjningen ved begyndende flydning  $\epsilon_f \rightarrow 0$  siges materialet at være stift, ideal-plastisk, da det praktisk taget straks flyder, når det deformeres. Når der ikke tages hensyn til deformationer mindre end  $\epsilon_f$ , er der imidlertid ingen principiel forskel på et stift, ideal-plastisk materiale og et ideal-plastisk. Alene den sidste benævnelse vil derfor blive benyttet i det følgende.

De fleste materialer besidder ikke ideal-plastiske egenskaber. Mange materialer kan dog tilnærmet betragtes som værende ideal-plastiske.

Udnyttelse af de plastiske egenskaber bevirker, at der for et konstruktionselement vil kunne opnås større bæreevne eller mindre materialebehov end hvad en elastisk beregning (sprødt brud) giver. De optimeringsmetoder, der udvikles i afsnit 2, vil alene være baseret på ideal-plastiske betragtninger.

## 1.2 Ideal-plastiske materialer.

I det følgende vil blive givet en kort redegørelse for teorien for ideal-plastiske materialer. De centrale begreber er flydebetænkelse og flydelov samt ekstremalprincipper.

For en dybere indføring kan henvises til [L-H,1975] og [N m.fl,1970] samt til følgende afhandlinger af Prager: [P&H,1951], [PRA,1952] og [PRA,1959]. Sidstnævnte regnes for en af grundlæggerne af den generelle teori for ideal-plastiske materialer. Allerede i 1936 havde russeren Gvozdev dog formuleret en generel plasticitetsteori, men denne blev imidlertid først i halvtredserne kendt i den vestlige verden.

### 1.2.1 Flydebetingelse og flydelov.

De fysiske betingelser for ideal-plastiske materialer kan beskrives ved hjælp af flydebetingelse og flydelov. Den førstnævnte angiver, hvilke kombinationer af spændinger, der netop kan frembringe flydning, medens den sidstnævnte omhandler forholdet mellem de plastiske tøjninger i flydetilstanden. Flydebetingelse og flydelov formuleres bedst ved hjælp af begreberne generaliserede spændinger og tøjninger. Hermed menes spændingsstørrelser og deformationsstørrelser, der netop korresponderer således, at de multipliceret og summeret giver det indre virtuelle arbejde  $W$ . D.v.s.  $W = Q_i d_i$ , hvor  $Q_i$  angiver de generaliserede spændinger og  $d_i$  de generaliserede tøjninger. Ved en skive kan de generaliserede spændinger være de sædvanlige spændingskomponenter  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\sigma_y$ , og de tilhørende generaliserede tøjninger er de sædvanlige tøjningskomponenter  $\epsilon_x$ ,  $\gamma_{xy}$  og  $\epsilon_y$ .

Flydebetingelsen angives oftest på formen

$$f(Q_i) = 0 \quad (1.1)$$

Funktionen  $f$  er afpasset således, at  $f < 0$  for spændinger, der ikke giver flydning, dvs. ingen tøjninger når der benyttes en stiv, ideal-plastisk teori. Tilsvarende angiver  $f > 0$  ikke mulige spændingstilstande, medens  $f = 0$  angiver spændingstilstande, der giver flydning. Da  $f = 0$  svarer til en hyperflade i et rum udspændt af spændingerne  $Q_i$ , benyttes ofte betegnelsen en flydeflade for afgrænsningen mellem tilladelige og ikke tilladelige tilstande. Den flydebetingelse, der er vist på fig. 1.3, angiver specielt en flydekurve, idet antallet af spændingskomponenter er 2. Flydefladen forudsættes at være en konveks flade.

Flydeloven omhandler som nævnt forholdet mellem de plastiske tøjninger, dvs. de tøjninger, der fremkommer når spændingerne netop ligger på flydefladen. Forholdet fastlægges ved v. Mises' flydelov:

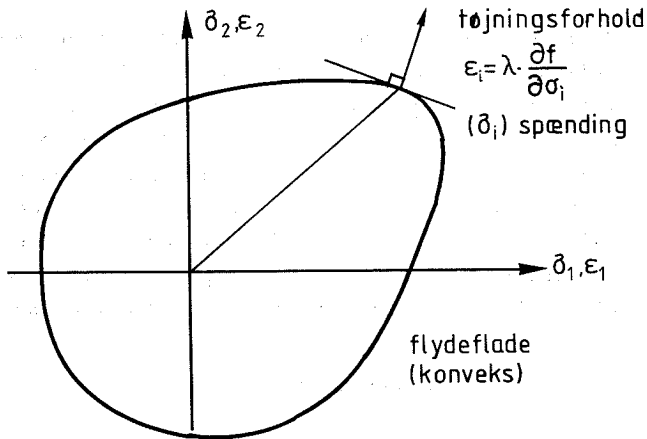


fig. 1.3 Flydebetingelse og flydelov

$$d_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial Q_i} \quad (1.2)$$

Det fremgår heraf, at i et koordinatsystem med  $Q_i$ ,  $d_i$  ud akserne, er  $d_i$  - vektoren en normal til flydefladen. Da det plastiske arbejde  $W_p = Q_i d_i$  skal være positivt, kan der vises, at  $\lambda \geq 0$ . Dette fremgår ved geometriske betragtninger, og er f.eks. omtalt i [N m.fl., 1970], hvor en teoretisk begrundelse for indføring af flydeloven også er givet. Ved en del flydeflader vil flydeloven ikke give entydige tøjningsforhold, dette gælder eksempelvis for flydeflader med knæk på flydefladen.

## 1.2.2. Ekstremalprincipper.

Medens flydebetingelse og flydelov angiver henholdsvis grænsebetingelser for spændingstilstande og tøjningsforhold for idealplastiske materialer, angiver ekstremalprincipperne metoder til bestemmelse af bæreevnen for et ideal-plastisk legeme. Med bære-

evnen menes her den konstante belastning, der bevirker, at legemet som helhed flyder.

Forinden beskrivelse af principperne er det hensigtsmæssigt at definere følgende begreber. For de første forstås ved en statisk tilladelig spændingsfordeling, en fordeling, der opfylder de statiske ligevægtsbetingelser (indre ligevægt og rand-ligevægt). Ved en sikker spændingsfordeling forstås en fordeling, der ikke eller netop giver flydning, dvs.  $f \leq 0$ . En geometrisk mulig brudmåde er endelig en flytningstilstand, der opfylder de geometriske randbetingelser og svarer til tøjninger, der er mulige i relation til flydeloven. Herefter får principperne følgende ordlyd:

NEDREVÆRDISÆTNINGEN:

(1.3)

Hvis der eksisterer en sikker og statisk tilladelig spændingsfordeling til optagelse af en given belastning, da er denne belastning mindre end eller lig med den virkelige brudbelastning. Den bestemte belastning er derfor en nedreværdi for den virkelige brudbelastning.

ØVREVÆRDISÆTNINGEN:

(1.4)

Hvis der eksisterer en geometrisk mulig brudmåde til optagelse af en given belastning, og det indre plastiske arbejde er lig med det ydre arbejde, da er den hertil svarende belastning større end eller lig med den virkelige brudbelastning. Den bestemte belastning er derfor en øvreværdi for den virkelige brudbelastning.

ENTYDIGHEDSSÆTNINGEN:

(1.5)

Hvis der eksisterer såvel en nedreværdiløsning som en øvreværdiløsning svarende til en given belastning, da er belastningen den eksakte bæreevne.

## 2. BESTEMMELSE AF BÆREEVNE/MATERIALEBEHOV FOR IDEAL-PLASTISKE LEGEMER.

Ved anvendelse af plasticitetsteoriens ekstremalprincipper er det muligt at udlede metoder til bestemmelse af bæreevne eller materialebehov for ideal-plastiske konstruktioner. Eksisterende metoder og teorier på dette grundlag omtales i det følgende, idet hovedvægten lægges på 2 - dimensionale legemer. For skiver udvikles numeriske optimeringsmetoder på basis af nedreværdiprincippet og matematisk programmering (lineær programmering). Ifølge nedreværdiprincippet skal de statiske ligevægts ligninger være tilfredsstillet, og spændingstilstanden skal overalt ligge indenfor eller på materialets flydeflade. Til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger anvendes dels en elementmetode og dels en differensmetode. Flydebetingelserne sikres opfyldt ved opskrivning af passende uligheder, hvorefter bæreevne eller materialebehov bestemmes ved optimering.

### 2.1 Optimeringsmetoder for bærende konstruktioner.

#### 2.1.1 Optimeringsmetoder for bestemmelse af bæreevne/materialebehov.

Når de fysiske betingelser for et givet legeme er kendte, er der mulighed for at bestemme bæreevne eller materialebehov. Ved bæreevnebestemmelse kræves normalt kun en lastproportionalitetsfaktor bestemt. Ved bestemmelse af mindste materialebehov, dvs. et optimum design, er der imidlertid tale om et mere kompliceret problem, idet flere parametre indgår som ubekendte. Hertil kommer, at de ofte indgår på en mere kompleks måde.

Det sidste problem har derfor været genstand for en del opmærksomhed ved såvel elastiske som plastiske materialer. En oversigt over den tidligste udvikling indenfor optimum design for bærende konstruktioner er givet af Wasintynski & Brandt [W & B, 1963],

medens de senere års udvikling er beskrevet af Sheu & Prager [S & P, 1968] samt Niordson & Pedersen [N & P, 1972]. Endvidere er de væsentligste metoder omtalt i lærebøger af henholdsvis Hupfer [HUP, 1970] og Gallagher & Zienkiewicz ed. [G & Z, 1973]. Medens der for en snes år siden hovedsagelig blev behandlet elastiske design problemer, har tendensen siden været, at udvikle metoder for plastiske legemer. Dette skyldes for det første, at der er opstået en kraftigere skelnen mellem brugstilstanden, hvor de fleste materialer kan regnes at have elastisk opførsel, og brudtilstanden, hvor en del materialer har plastisk opførsel. For det andet er plasticitetsteorien lettere at benytte som grundlag ved design problemer. I det følgende vil det være forudsat, at de betragtede materialer er ideal-plastiske.

Også bæreevneproblemer ved plastiske legemer har været genstand for stor opmærksomhed. Som omtalt er problemstillingen dog sædvanligvis enklere end ved designproblemer.

### 2.1.2. Optimeringsmetoder på ideal-plastisk grundlag.

Anvendes plasticitetsteoriens ekstremalprincipper på legemer af ideal-plastisk materiale, er det muligt at udlede optimeringsmetoder til bestemmelse af bæreevne eller materialebehov. Hovedvægten lægges i det følgende på numeriske optimeringsmetoder, der bygger på matematisk programmering.<sup>+)</sup>

Fordelene ved disse metoder er først og fremmest, at de ikke knytter sig strengt til legemer af en ganske bestemt form og en ganske bestemt belastning, som det ofte er tilfældet ved analytiske metoder. Metoderne vil altså kunne bruges ret generelt, og sædvanligvis kan materialets flydebetingelse variere over legemet. Ulemperne ved anvendelse af matematisk programmering vil ofte være, at problemerne ikke kan løses eksakt, samt at beregningerne bliver meget edb - resource krævende p.g.a. stort lagerbehov og lang beregningstid.

---

<sup>+)</sup> Se afsnit 2.6.



For metoder udledt på grundlag af dels øvreværdiprincippet og dels nedreværdiprincippet gælder følgende:

Øvreværdimetoden: En øvreværdi for bæreevnen kan findes ud fra beregning af såvel det indre som det ydre arbejde for et givet, tilladeligt flytningsfelt. Bæreevnen vil være den mindste af alle øvreværdier, hvorfor dens bestemmelse er et minimeringsproblem. Ved bestemmelse af det tilladelige flytningsfelt kan benyttes en elementmetode, en differensmetode eller lignende hvor flytningsstørrelserne er de variable. Optimeringsproblemet får herved formen  $\min p = \text{indre arbejde} / \text{ydre arbejde for enhedslast}$ , hvor de variable er knudflytninger. Det ikke-restriktive minimeringsproblem vil normalt være ikke-lineært, jvf. Ranaweera & Leckie [R&L, 1970]. I specielle tilfælde er der dog mulighed for lineært problem - Chan [CHA, 1972] og Anderheggen & Knöpfel [A&K, 1972].

Nedreværdimetoden: En nedreværdi for bæreevnen kan findes, når en sikker, statisk tilladelig spændingsfordeling er bestemt. Bæreevnen vil være den største af alle nedreværdier, hvorfor dens bestemmelse er et maximeringsproblem. En statisk tilladelig spændingsfordeling kan bestemmes v.h.a. en elementmetode, differensmetode eller lignende, hvor spændingsstørrelserne (eller afledte spændingsstørrelser) er variable. Sådanne fordelinger er sædvanligvis vanskeligere at bestemme end flytningsfelter, da de indre ligevægtsligninger skal være tilfredsstillet. Imidlertid fås lineære ligevægtsudtryk, og dette forenkler problemet noget. Flydebetingelserne, der skal tilfredsstilles, vil imidlertid ikke være lineære. Optimeringsproblemet kan formuleres som:

maximer  $p$  (lineær),  
når ligevægtsligninger (lineære)  
og flydebetingelser (ikke-lineære) er tilfredsstillet.  
Ofte er det muligt at bestemme lineære tilnærmelsesudtryk for flydebetingelserne, og hele problemet bliver da lineært.

Ved designproblemer vil det indre arbejde blive mere kompliceret, og "mere ikke-lineært", idet det nu bliver et produkt af deformationsvariable (evt. materialekarakteristika).

Derimod vil ligevægtsligningerne forblive uforandrede, og flydebetingelserne vil kunne lineariseres eller bestå af en sum af funktionsudtryk, hvor henholdsvis spændingsvariable og designvariable er adskilt. Det sidste gælder f.eks. v. Mises' flydebetingelse for et plant problem:  $[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2]^{\frac{1}{2}} - \sigma_0 \leq 0$ , hvor  $\sigma_0$  angiver flydespændingen. Nedrevårdimetoden vil derfor umiddelbart give de simpleste udtryk ved designproblemer.

Ekstremalprincipperne blev i forbindelse med matematisk programmering først benyttet ved bestemmelse af minimumsvægt for bjælker og rammer, se f.eks. Foulkes [FOU, 1954] og Prager [PRA, 1962], idet der blev anvendt lineær programmering<sup>+)</sup> . Siden er princippernes anvendelse blevet udstrakt til også at gælde 2 - og 3 - dimensionale legemer, som det fremgår af de i afsnit 2.2.1 angivne referencer samt af det følgende.

Blandt de første løsninger for 2 - dimensionale legemer hører en pladeløsning af Koopman & Lance [K & L, 1965], hvor nedrevårdiprincippet benyttes som grundlag for bestemmelse af bæreevnen. Ved den statiske del benyttes en differensmetode, og i optimeringsfasen anvendes lineær programmering med Tresca's flydebetingelse lineariseret. R. Wolfensberger har i sin doktorafhandling [WOL, 1964], der også omhandler jernbetonpladers flydebetingelse, på omtrent samme grundlag angivet såvel bæreevnebestemmelse som armeringsbestemmelse for jernbetonplader. Her benyttes dog en ligevægtsmetode, der minder om elementmetoden, idet der for et rektangulært område benyttes konstant/lineær snitkraftfordeling langs randene. Ligevægten for de bøjende momenter er ikke korrekt opfyldt, men der kan altid bestemmes løsninger på den sikre side.

Element-teknikkens gennembrud indenfor elastiske beregninger bevirker, at de følgende års udvikling af ideal-plastiske beregninger også er blevet præget af denne, medens der stadig hovedsagelig har været anvendt lineær programmering i optimeringsfasen. Fordelen ved elementmetoden fremfor differensmetoden er, at den er mere fleksibel ved tilpasning til det betragtede legemes

---

<sup>+)</sup>  Se afsnit 2.6.2

geometriske form, samt at den kan opbygges så den altid enten giver en nedreværdiløsning eller en øvreværdiløsning.

Ved nedreværdiløsninger benyttes elementer, der tilfredsstiller ligevægtsligningerne, idet snitkraftfordelingen er givet ved et antal parametre. Tilsvarende benyttes ved øvreværdiløsninger elementer, der tilfredsstiller de geometriske betingelser, idet flytningerne er givet ved et antal parametre. En sådan fremgangsmåde blev først benyttet af Hayes & Marcal [H&M, 1967] ved bestemmelse af øvreværdier. Hodge & Belytschko [H&B, 1968] angiver elementmetode-løsninger ved bæreevnebestemmelse for plader, idet de benytter såvel nedreværdi- som øvreværdiprincip. Ved nedreværdiløsningen benyttes kvadratisk momentfordeling langs elementrandene, og flydebetingelserne opskrives for de ubekendte ekstremumpunkter. Ved successiv beregning bestemmes disse punkter, og der optimeres ikke-lineært med SUMT - metoden, se f.eks. [F&Mc, 1968] og [K&M, 1973]. De geometriske ekstremumpunkters flytning under den successive beregning bevirker imidlertid vanskeligheder, og metoden viser sig meget edb - resource krævende for selv ret få elementer. De beregnede resultater viser for nogle simple belastningstilfælde ret god overensstemmelse med andre løsninger. Ved øvreværdiløsningen benyttes kvadratiske flytningsfunktioner, og problemet omformes til et ikke-lineært optimeringsproblem uden restriktioner. Også her fås vanskeligheder, og løsningerne viser sig ret følsomme overfor valg af elementinddeling. Ranaweera & Leckie [R&L, 1970] har angivet nedreværdiløsninger for bæreevnen ved såvel skiver som plader af dels Tresca- og dels v.Mises materiale. Som foreslået i den forrige reference er der her benyttet lineær programmering. Da der benyttes ikke-lineære snitkraftfordelinger langs elementrandene og flydebetingelserne opskrives i nogle faste punkter, vil flydebetingelserne kunne overskrides i mellemliggende punkter. Efter optimeringen udregnes derfor en faktor, som den fundne last må multipliceres med for at få en korrekt nedreværdi. Også øvreværdiløsninger angives. Disse er opbygget omtrent som de ovenfor omtalte. Der synes ikke at være nogen markant forskel mellem nøjagtigheden af disse løsninger og de løsninger, nedreværdimetoden fører til. Det skal nævnes, at også

Belytschko & Hodge har angivet en nedreværdimetode for skiver - [B&H, 1970].

Lignende nedreværdimetoder, som angivet i [R&L, 1970] er for bæreevnebestemmelse ved plader og skiver angivet af Anderheggen og Knöpfel [AND, 1971], [KNÖ, 1973], [A&K, 1972] og [AND, 1976]. Her opstilles ligevægten dog ud fra det virtuelle arbejdes princip, idet der gøres antagelser om flytningerne. Herved bliver metoden en slags bastard - metode, og den giver derfor ikke med fuld sikkerhed en nedreværdi. Edb - regnearbejdet bliver dog mindre og de angivne løsninger ret gode.

Andre løsninger for såvel bæreevneproblemet som minimum skive- eller pladetykkelse er for homogene, ideal-plastiske materialer angivet af italienerne Mair, Zavelani-Rossi & Benedetti [M m.fl., 1972], Faccioli & Vitiello [F&V, 1973], Zavelani [ZAV, 1973] samt Polizzotto [POL, 1975]. Sidstnævnte behandler også mere generelt optimeringsproblematikken, medens Zavelani benytter en speciel linearisering, der i visse sammenhænge kan være mere fordelagtig end den gængse, se kap. II, afsnit 3.1.2.

I forbindelse med optimering af specielt jernbetonskiver og plader kan nævnes Chan [CHA, 1972], der har angivet bæreevneløsninger for jernbetonplader. Fremgangsmåden er omtrent som tidligere angivet af Hodge & Belytschko, idet problemet løses som et ikke-lineært nedreværdiproblem. Også her gælder, at beregningerne for selv få elementer er meget dyre. Desuden har H. Pedersen [PED, 1974] fra Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth, angivet bæreevnebestemmelse og armeringsbestemmelse for jernbetonplader ud fra nedreværdiprincippet, hvor der dels er benyttet elementer med kubisk og dels med lineær snitkraftfordeling. Der er ved optimering benyttet den af Wolfensberger [WOL, 1969] angivne linearisering af pladeflydebetingelsen, idet der benyttes lineær programmering.

For geotekniske, plane problemer har Vollenweider [VOL, 1969] og Lysmer [LYS, 1970] angivet bæreevneløsninger for stribefundamenter

på jord, idet nedreværdimetoden benyttes. Begge anvender elementmetode og lineær programmering, idet Coulombs flydebetingelse lineariseres. Hos førstnævnte benyttes en generel elementinddeling med ikke statisk korrekte elementer, medens sidstnævnte benytter statisk korrekte elementer, der indlægges ud fra en forventet spændingsfordeling. Begge metoder bevirker ret dyre løsninger, særlig er metoden med generel elementinddeling dyr i brug.

Medens de hidtil omtalte løsninger har omhandlet skive- og plade-problemer, er det mere begrænset, hvad der findes af metoder til løsning af egentlige skalproblemer. For rotationssymmetriske skaller med central belastning angav Biron & Hodge [B&H, 1967] dog såvel øvre- som nedreværdiløsninger, og siden er nogle løsninger for specielle skalproblemer kommet til. De fleste af disse er omtalt i [BIR, 1976].

Udover de hidtil nævnte løsninger, der alle har været baseret på matematisk programmering, eksisterer flere mere eller mindre analytiske metoder. Mange designproblemer for specielle legemer (rektangulære og cirkulære plader m.fl.) med specielle belastninger (symmetriske m.fl.) er således løst v.h.a. Drucker & Shield's kriterium for, at en ideal-plastisk konstruktion har minimum vægt, hvilket er tilfældet når dissipationsenergien er konstant over hele volumenet, [D&S, 1956]. Dette anvendes f.eks. til optimering af sandwich skaller med fast og bevægelig last, idet Save & Shield [S&S, 1964] har tilpasset Drucker & Shield's generelle bevis.

En af de væsentligste bidragydere ved analytiske løsninger har imidlertid været W. Prager, der udover egne bidrag har opstillet en analogimetode sammen med P.V. Marcal [M&P, 1964], hvor der knyttes en associeret, ikke-lineær elastisk konstruktion til den givne konstruktion.

For specielt jernbeton findes imidlertid også udledt en del analytiske løsninger, hvortil kommer, at flere har draget konklusioner om hvilke sammenhænge, der er mellem vægt og spændingsfordeling m.m. Her skal dog kun anføres de væsentligste bidrag.

En udmærket oversigt over analytiske optimeringsmetoder ved såvel jernbeton som andre materialer er givet af S.F. Yasseri i "Optimal Design of Plates" [YAS, 1977].

Det hyppigst betragtede problem er armeringsoptimering i bjælker og plader med konstante tværsnitsmål. Ved pladerne har det været væsentligt at få fastlagt en passende optimeringsfunktion for armeringsmængden (armeringsbehov). R.H. Wood viste, at det var rimeligt at benytte proportionalitet mellem moment og armeringsbehov [WOO, 1961]. Med denne antagelse har Morley [MOR, 1965] vist, at en plade, der er optimalt armeret, deformeres til en flade med konstant krumning og samme hovedretninger for krumninger og momenter. Lowe & Melchers [L&M, 1972] har udviklet en metode "load path", der bygger på et én - dimensionalt momentfelt, der tilfredsstiller optimalitetskravene. Denne metode er blevet benyttet i en række tilfælde. Melchers & Lowe har således selv udviklet metoden til anvendelse på flere forskellige plader med specielle lastfordelinger og randbetingelser. Ved plader med variabel tykkelse er der også gjort forsøg på analytiske optimeringsløsninger, f.eks. Mroz [MRO, 1967] og Melchers [MEL, 1973 + 1976]. Kun ved ganske specielle plader er der dog opnået brugbare resultater.

Blandt andre løsninger kan nævnes en analogiløsning for jernbetonbjælker af Kaliszky [KAL, 1965], hvor problemet løses ved transformation til en elastisk bjælke. Endelig er det ved bæreevnebestemmelse muligt at bestemme løsninger ved en iterativ beregning af det tilsvarende elastiske problem, idet elasticitetsmodulen løbende ændres. For jernbetonplader har Bäcklund [BAC, 1973] benyttet en trinvis metode, hvor momenterne transformeres til en sikker tilsta-

Med denne oversigt er angivet de væsentligste resultater indenfor optimering af bæreevne/materialebehov for legemer af idealplastisk materiale. Det fremgår, at langt de fleste løsninger indenfor matematisk programmering har omhandlet bæreevnebestemmelse, og at de hovedsagelig har omhandlet plader. Italienerne Mair, Zavelani-Rossi og Benedetti har dog arbejdet med matematiske programmeringsløsninger til bestemmelse af minimums-tykkelse for

homogene, plastiske skiver. Bortset fra en omtale af nogle ikke offentliggjorte løsninger i [AND, 1976] kendes ingen løsninger for armeringsbestemmelse i jernbeton-skiver, hvor snitkraftfordelingen som regel varierer langt mere end i de kvadratiske, homogene konsolskiver, der ofte angives løsninger for. Bæreevneproblematikken for fundamenter er heller ikke behandlet meget, idet kun Vollenweider og Lysmer har angivet sådanne løsninger. M.h.t. generelle løsningsmetoder for jernbeton skaller haves ikke kendskab til nogen. Disse problemer vil blive behandlet i det følgende, idet dog det sidstnævnte problem kun behandles ret sporadisk.

## 2.2 Numeriske optimeringsmetoder for bærende konstruktioner, når nedreværdiprincippet benyttes.

I det følgende vil optimeringsmetoder for bestemmelse af bæreevne/materialebehov ved 2 - dimensionale legemer blive udviklet. Metoderne er baseret på nedreværdiprincippet og matematisk programmering.

Ved anvendelse af en nedreværdimetode kræves som tidligere nævnt dels en statisk tilladelig spændingsfordeling, d.v.s. en fordeling, der tilfredsstiller ligevægtsligningerne, dels at flydebetingelserne overalt er tilfredsstillet.

Følgende skal derfor fastlægges ved bæreevnebestemmelsen:

1. en statisk tilladelig spændingsfordeling, (se afsnit 2.3 - 2.4)
2. en spændingsfordeling, der opfylder flydebetingelserne (se afsnit 2.5)
3. den bæreevne på den sikre side, der ligger så nær som muligt den eksakte (se afsnit 2.7)

Ved bestemmelse af materialebehov er punkt 1 og 2 uforandrede, medens der ved det sidste skal bestemmes:

3. det materialebehov på den sikre side, der ligger så nært som muligt det eksakte (se afsnit 2.7)

Metoderne fører for punkt 1's vedkommende til lineære lighedsudtryk, medens punkt 2 bevirker ikke-lineære ulighedsudtryk. Lineariseres disse fås imidlertid alt i alt et lineært programmeringsproblem, idet udtrykket for bæreevne eller materialebehov normalt har lineær form. Ved løsning af dette problem fastlægges da bæreevnen eller materialebehovet.

### 2.3 Statisk tilladelige spændingsfordelinger for skiver.

#### 2.3.1 Metoder til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger.

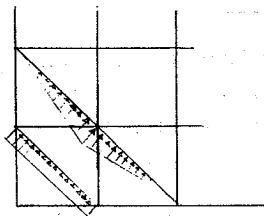
Den spændingsfordeling, der fremkommer ved den elasticitets-teoretiske løsning for et problem, tilfredsstiller de statiske ligevægtsligninger. Det er derfor muligt at anvende en sådan fordeling ved den plastiske beregning. Imidlertid er det langt fra givet, at der herved fås optimal bæreevne eller materialebehov. Der er derfor behov for at kunne ændre på spændingsfordelingen samtidig med, at de statiske ligevægtsligninger er tilfredsstillet, hvorved de fordelagtigste løsninger kan udvælges.

I det følgende vil to forskellige metoder til bestemmelse af variable, statisk tilladelige spændingsfordelinger blive beskrevet. Disse er henholdsvis en ligevægts - elementmetode, og en spændingsfunktions - differensmetode, se afsnit 2.3.3 og 2.3.4.

Den førstnævnte metode er baseret på en geometrisk opdeling af konstruktionen i polygonformede elementer, hvor spændingsfordelingen bestemmes, så såvel de indre ligevægtsligninger i elementet som de ydre randligevægtsligninger er tilfredsstillet uden hensyn til deformationerne.



Eksakt tilfredsstillende af flydebetingelserne er simplest ved lineær spændingsvariation, der derfor er at foretrække - jf. afsnit 2.5. Ved komplicerede spændingsforløb, f.eks. hvor der arbejdes med koncentrerede stringerkræfter, vil elementinddelingen dog ofte være ret afgørende for nøjagtigheden, da stringerkræfterne spredtes lineært ud over elementerne - se fig. 2.1. Dette forhold gælder ofte ved jernbetonskiver og stribefundamentsproblemer (se kap. II og III henholdsvis). Denne ulempe gør sig imidlertid ikke tilnærmelsesværdig så stærkt gældende ved elastiske problemer, hvilket skyldes, at der her normalt fås kontinuerte spændingsfordelinger.



(kun normalspænding vist)

Fig. 2.1. Spredning af spændinger ved elementmetode.

En metode, der bedre tager hensyn til forholdene ved de koncentrerede stringerkræfter, er differensmetoden. Indføres en spændingsfunktion opnås, at de indre ligevægtsligninger automatisk bliver opfyldt i de benyttede diskrete punkter. Man har således kun kendskab til "middelspændingerne" for en omegn omkring det diskrete punkt, og den indre ligevægt er kun gældende for disse middelspændinger. Fordelene herved er, at man ikke lokalt begrænser ligevægten til at være afhængig af visse simplificerede spændingsfordelinger (f.eks. lineær variation). Imidlertid betyder dette, at der kan forekomme såvel større som mindre spændinger i omegnen omkring et punkt. Dette synes dog ifølge afsnit 2.3.4 og 2.5 at være af underordnet betydning.

For begge metoder gælder, at randbetingelserne kan opdeles i statiske og geometriske betingelser. De førstnævnte angiver hvilke spændinger legemet skal antage langs den pågældende rand, og sikres opfyldt ved opstilling af randkravene i afsnit 2.3.2. De sidstnævnte, d.v.s. understøtningsbetingelserne, angiver ligevægtsmæssig set, at der kan optages ubegrænsede spændinger i de pågældende retninger, hvorfor der ikke opskrives ligevægtskrav her. Det må imidlertid sikres, at spændingerne er fuldt i overensstemmelse med den geometriske virkemåde, hvorfor spændingernes fortegn må vurderes.

### 2.3.2. Ligevægtsligninger

Indføres spændingsstørrelserne  $\sigma_u$ ,  $\tau_{uv}$ ,  $\tau_{vu}$  og  $\sigma_v$  i en skive, som angivet på fig. 2.2, følger af momentligevægt, at der kun fås 3 uafhængige spændingsstørrelser, nemlig  $\sigma_u$ ,  $\tau_{uv}(=\tau_{vu})$  og  $\sigma_v$ .

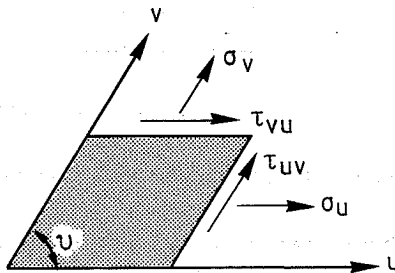


Fig. 2.2. Skivespændinger.

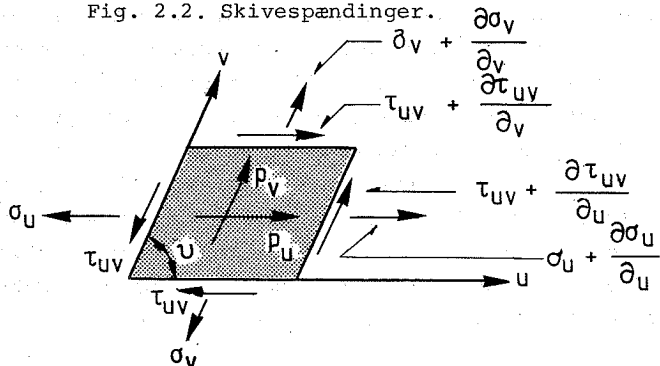


Fig. 2.3. Tilvækster til skivespændinger.

Ved projektlionslignevægt fås endvidere iflg. fig. 2.3, at de indre ligevægtsligninger kan udtrykkes som:

$$\frac{\partial \sigma_u}{\partial u} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} + p_u \sin v = 0 \quad (2.1)$$

og

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial v} + \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial u} + p_v \sin v = 0$$

De ydre ligevægtsligninger (randligevægten) kan iflg. fig. 2.4 udtrykkes ved

$$\sigma_n = \frac{1}{c} \cdot [b \cos \xi \sigma_u + (a \cos \xi + b \cos(v-\xi)) \tau_{uv} + a \cos(v-\xi) \sigma_v] \quad (2.2)$$

$$\tau_{ns} = \frac{1}{c} \cdot [-b \sin \xi \sigma_u + (b \sin(v-\xi) - a \sin \xi) \tau_{uv} + a \sin(v-\xi) \sigma_v],$$

hvor  $\sigma_n$  og  $\tau_{ns}$  udtrykker randbelastningen.

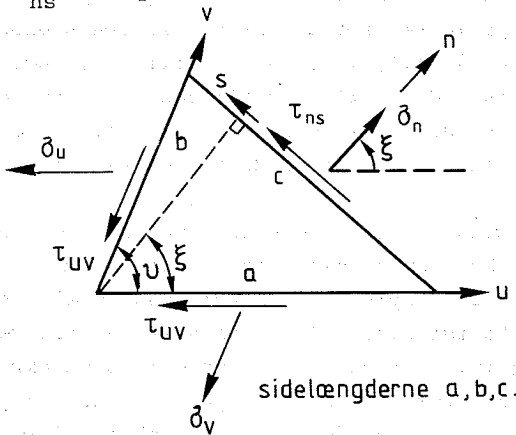


Fig. 2.4. Randspændinger.

Når såvel de indre som de ydre ligevægtsligninger er tilfredsstillt, er legemet i total ligevægt.

Da skivespændingerne regnes konstante over skivens tykkelse  $t$ , kan skivesnitkræfterne udtrykkes ved

$$N_u = \sigma_u t, \quad N_{uv} = \tau_{uv} t, \quad N_v = \sigma_v t, \quad (2.3)$$

Ved anvendelse af nedreværdiprincippet drejer det sig derfor først og fremmest om at bestemme en statisk tilladelig og sikker snitkrafttilstand, da flydebetingelsen kan udtrykkes ved snitkræfterne.

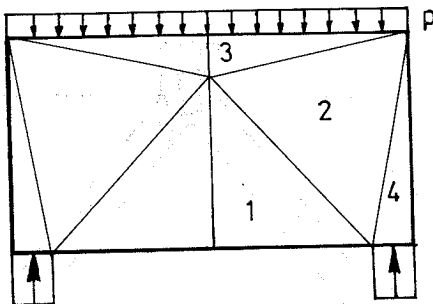
### 2.3.3 Ligevægtselementmetoden (ELLI)

En metode til bestemmelse af statisk tilladelige spændings- el. snitkraftfordelinger er som nævnt at inddele skiven i elementer. Elementerne skal være såkaldte ligevægtselementer, idet de skal tilfredsstille alle statiske ligevægtskrav.

Baseres elementmetoden i den elastiske teori på variationsprincipper, benævnes den elementmetode, der bygger på princippet om stationær komplementær energi for en "ligevægtselementmetode" - jf Pian & Tong [P & T, 1972] eller Nielsen [N,LO, 1976]. Forskellen fra denne definition og til den her benyttede er altså, at her alene ses på de statiske ligevægtsforhold, medens materialets deformationsforhold lades ude af betragtning.

Den simpleste variant af ligevægtselementmetoden er en, hvor man opererer med konstante spændinger i elementerne, og med randlige vægtskravene (2.2) opfyldte. Herved fås total ligevægt, idet de indre ligevægtsligninger (2.1) automatisk er tilfredsstillede. Dette gælder dog kun, når der ikke optræder volumenkræfter; i modsat fald kan der ikke opnås ligevægt. Som det antydes i eks. 2.1, kan der ved passende elementinddeling på ret simpel vis bestemmes en statisk tilladelig spændingsfordeling. Metoden kan derfor anvendes ved håndregning, og er f.eks. benyttet i

Eks. 2.1 Elementer med konstante spændinger.



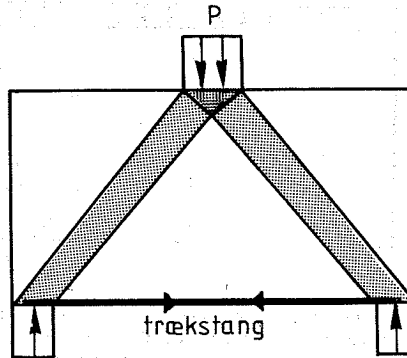
Spændingstilstanden bestemmes ved at starte med nogle passende elementer og dernæst gå successivt frem med de følgende. Der kan f.eks. begyndes med at bestemme de vandrette normalspændinger i element 1 og 3 ud fra momentet om symmetrilinien. Da forskydningsspændingerne her er nul, og de lodrette normalspændinger kan bestemmes ved simpel ligevægt langs de vandrette rande, kan spændingstilstanden bestemmes i de pågældende elementer, og der kan fortsættes til naboelementerne.

[N, MP, 1969]. Bl.a. fordi elementinddelingen skal tilpasses for at kunne overføre et moment og fordi, der ikke kan tages hensyn til volumenkræfter, er metoden imidlertid ret uegnet ved automatiske beregningsmetoder.

Der er derfor behov for elementer med finere spændingsfordeling, så de kan bruges mere generelt. Inden disse behandles, skal det dog bemærkes, at der undertiden kan opbygges enkle og gode spændingsfordelinger på anden vis. Et eksempel på dette er eks. 2.2, hvor en jernbetonskive alene armeret i undersiden betragtes.

Af de nye ligevægtselementer vil vi kræve, at de giver mulighed for betragtning af forskellige statisk tilladelige spændingsfordelinger, så den fordeling, der er fordelagtigst for det pågældende plastiske legeme, kan fastlægges. Samtidig ønskes en bedre og bedre løsning, jo flere elementer der benyttes.

Eks. 2.2 Speciel spændingsfordeling for stift, idealplastisk legeme.



Spændingstilstanden er givet, så de uskraverede områder er ubelastede, medens de enkelt skraverede områder angiver trykstringere. Det dobbelt skraverede område har toakset spændingstilstand.

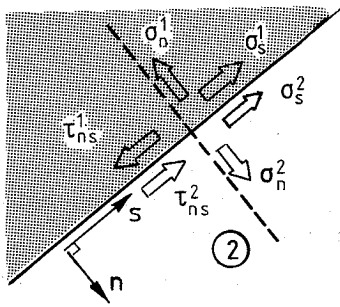
(gengivet fra [N, MP, 1969]).

Elementerne er karakteriseret ved, at spændingerne udtrykkes ved et antal variable og ved fladekoordinaterne. Der kan f.eks. benyttes polynomiske udtryk, i  $u$  og  $v$ , hvorved spændingerne langs en rand kan skrives som:

$$\sigma = \beta_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 \dots, \quad (2.4)$$

hvor  $s$  er en parameter langs randen, og  $\beta_1$  er de ubekendte variable. Specielt kan  $s$  være lig med  $u$ , når randen er parallel med  $u$ -aksen. Spændingerne skal nu tilfredsstille såvel de indre som de ydre ligevægtsligninger. De indre ligevægtsligninger (2.1) indeholder de afledede af (2.4), og fører til lineære udtryk i de variable. Tilsvarende giver de ydre ligevægtsligninger (2.2) lineære udtryk, og alt i alt fås således et lineært ligevægtsproblem. Ved opfyldelse af dette skal der da fremkomme et antal overtallige spændingsvariable, så forskellige fordelinger kan undersøges.

Ved opfyldelse af randligevægten kræves blot, at der er kontinuitet mellem snitspændingerne langs elementranden, medens normal-



elementrand  
(diskontinuitetslinie)

Ligevægt ;  
Diskontinuitet (evt.);

Fig. 2.5. Randlegeevægt og diskontinuitetslinie.

spændingerne parallel med randen tillades at være diskontinuerte. D.v.s. randen er en diskontinuitetslinie. Denne forudsætning, der viser sig nødvendig for overhovedet at kunne opbygge et anvendeligt ligevægtselement, er angivet på fig. 2.5. Medens forudsætningen kan synes tvivlsom i det elastiske tilfælde, virker den langt mere rimelig i det stift, ideal-plastiske tilfælde. Her kan der netop forekomme et spring i disse spændinger, når en tøjning bliver forskellig fra 0 i det ene element og er lig 0 i det andet element. Derfor kan der også, som i eksempel 2.2, arbejdes med koncentrerede stringerkræfter.

Watwood [WAT, 1966] og Watwood & Hartz [W & H, 1968] har fundet, at for et generelt anvendeligt ligevægtselement er det nødvendigt at kræve, at

$$M - N + F \geq 0, \quad \text{hvor} \quad (2.5)$$

$M$  = antal spændingsvariable

$N$  = antal ligevægtsligninger

$F$  = antal variable langs elementets ene rand, eller  
antal frihedsgrader for det pågældende legeme.

Dette skyldes følgende forhold:

- (a) "Elementet må have et tilstrækkeligt antal uafhængige spændingsvariable på hver rand til optagelse af givne spændinger på de øvrige rande."

Består et legeme af blot et element, da bør det kunne understøttes langs én rand alene.

- (b) "De eneste restriktioner langs randene må være de, der sikrer, at elementet er i total ligevægt."

Består et legeme af blot et element, bør belastningen kunne påføres, så der kun kræves, at det er i total ligevægt.

Punkterne (a) og (b) udtrykker de krav, der må stilles til et element, for at det kan benyttes som et generelt byggeelement, og fører til, at en statisk tilladelig spændingsfordeling kan bestemmes. Samtidig bevirker opfyldelse af dem, at der fås flere og flere uafhængige variable, jo flere elementer der sammensættes, da nogle af ligevægtsligningerne bliver fælles for to elementer. Spændingsfordelingen kan derfor bedre varieres, og dermed er der større sandsynlighed for at kunne tilnærme den fordelagtigste fordeling.

Punkt (b) fører til, at elementet ikke kan have indbyrdes afhængige forskydningsspændinger i et hjørne. Dette kan overvindes ved, at der indlægges en diskontinuitetslinie, som vist på fig. 2.6. Et generelt element, der tilfredsstiller punkt (b), kan

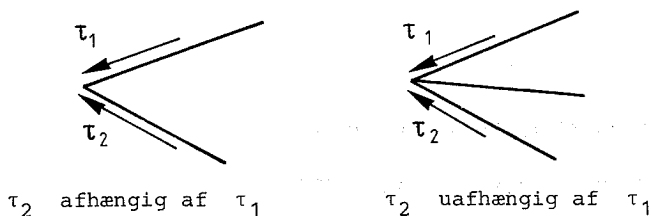


Fig. 2.6. Forskydningsspændinger i hjørnepunkt.



derfor dannes ved opdeling af trekantelementet i 3 subelementer, hvilket er vist på fig. 2.7. Efter eliminering af de afhængige variable fra indre randlige vægtsligninger bliver spændingerne i det sammensatte element udtrykt alene ved de uafhængige variable.

Et element, som det ovenfor antydte, har imidlertid den ulempe, at der må opstilles 3 gange så mange flydebetingelser som ved et almindeligt trekantelement, ligesom der bliver flere ligevægtsligninger. Endvidere bliver de ydre elementrande ikke kortere ved sub-elementinddelingen, og diskontinuitetslinierne bliver ikke gennemgående. Stringerkræfter vil derfor blive spredt ud over den samme rand som ved et almindeligt trekantelement.

Af hensyn hertil er det derfor mere nærliggende at sammensætte

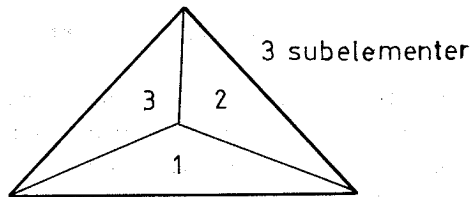


Fig. 2.7. Watwood-Harts element

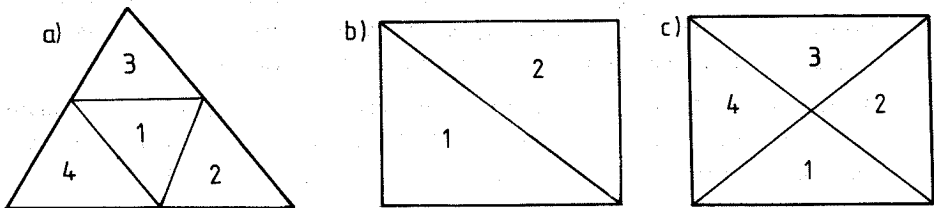


Fig. 2.8. Sammensatte elementer

elementerne som f.eks. vist på fig. 2.8. Herved kan betingelse (b) ikke opfyldes generelt, som det fremgår af det foregående og fig. 2.9. Denne betingelse er dog kun af direkte betydning ved det sammensatte elements rande, d.v.s. uden betydning for det rektangulære element på fig. 2.8 C. M.h.t. betingelse (a) er denne afhængig af spændingsfordelingen.

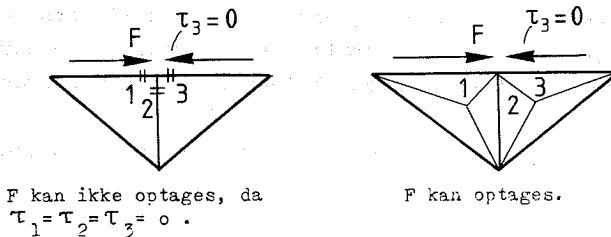


Fig. 2.9. Optagelse af forskydning

I fig. 2.10 er vist en oversigt over nogle mulige elementer, idet det dog skal bemærkes, at elementer med konstante spændinger, som tidligere nævnt, er udelukket som generelle elementer. Alle de i skemaet viste elementer er givet ved samme polynomiegrad langs både ligevægtsrande og ikke ligevægtsrande. For rektangulære elementer er det muligt at angive forskellige variationer langs de 2 slags rande, hvilket evt. kan forbedre lidt på de ovenfor nævnte forhold. Her er de rektangulære elementer dog kun medtaget for sammenligningens skyld, idet de er meget ugunstige i forhold til de trekantede m.h.t. antal frie variable.

Sammensættes 2 trekantelementer, se fig. 2.11 b, til et rektangulært, vil der være mulighed for diskontinuitet i spændingerne i en skrå retning, og ved sammensætning af 4, se fig. 2.11 c, vil der være mulighed for diskontinuiteter i begge de skrå retninger. For det sidste tilfælde gælder endvidere, at antallet af frie, d.v.s. uafhængige variable netop svarer til antallet af variable

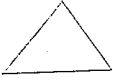
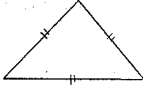
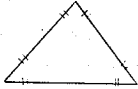
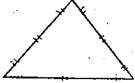


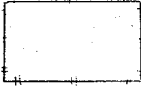
FORM	Polynomiegrad i x- og y-retn.	Antal variable, antal ligevægtslign. m.m.
	$\sigma_u$ $\tau_{uv}$ $\sigma_v$ 0. grads (konstant)	ligevægtsligninger  $M = 3 \quad \nabla = 2(3)$ $N = 6 \quad (I=0, Y=6)$ $M - N + \nabla = -1(-2)$
	$\sigma_u$ $\tau_{uv}$ $\sigma_v$ 1. grads (lineært)	 $M = 9 \quad \nabla = 4$ $N = 14 \quad (I=2, Y=12)$ $M - N + \nabla = -1$
	$\sigma_u$ $\tau_{uv}$ $\sigma_v$ 2. grads (parabolsk)	 $M = 18 \quad \nabla = 6$ $N = 24 \quad (I=6, Y=18)$ $M - N + \nabla = 0$
	$\sigma_u$ $\tau_{uv}$ $\sigma_v$ 0. grads (konstant)	 $M = 3 \quad \nabla = 2$ $N = 8 \quad (I=0, Y=8)$ $M - N + \nabla = -3$
	$\sigma_u$ $\tau_{uv}$ $\sigma_v$ 2. grads (parabolsk)	 $M = 18 \quad \nabla = 6$ $N = 30 \quad (I=6, Y=24)$ $M - N + \nabla = -6$
<p> <math>M</math> = Antal spændingsvariable  <math>N</math> = Antal ligevægtsligninger (<math>M = I + Y</math>)  <math>I</math> = Antal indre ligevægtsligninger  <math>Y</math> = Antal ydre (rand) ligevægtsligninger  <math>\nabla</math> = Antal ydre (rand) ligevægtsligninger pr. side         </p>		

Fig. 2.10. Trekantede og rektangulære ligevægtselementer.



Elementet med lineær spændingsfordeling er vist på fig. 2.12, og nedenfor er udtrykkene for spændingerne angivet, idet de variable benævnes  $\beta_i$ . Endelig er udtryk for de afhængige variable, der kan bestemmes ud fra de indre ligevægtsligninger, anført. De uafhængige variable bliver herved  $\beta_1 - \beta_5$  og  $\beta_7 - \beta_8$ .

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \beta_1 + \beta_2 \frac{u}{a} + \beta_3 \frac{v}{b} \\ \tau_{uv} &= \beta_4 + \beta_5 \frac{u}{a} + \beta_6 \frac{v}{b} \\ \sigma_v &= \beta_7 + \beta_8 \frac{u}{a} + \beta_9 \frac{v}{b}\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\beta_6 = -\beta_2 \cdot b/a - p_u \sin v \cdot b \quad (2.7)$$

$$\beta_9 = -\beta_5 \cdot b/a - p_v \sin v \cdot b$$

På fig. 2.13 er de tilsvarende forhold vist for et element med parabolisk spændingsfordeling, og udtrykkene er givet ved de følgende formler (2.8) og (2.9):

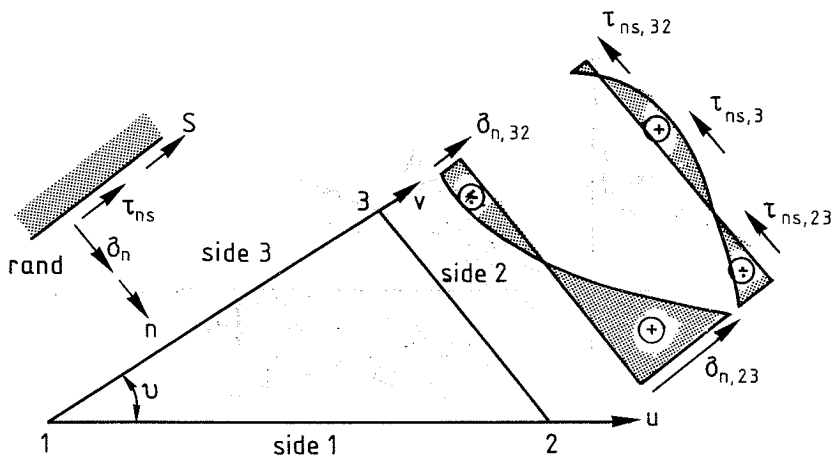


Fig. 2.13. Parabolisk snitkraft-fordeling.

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \beta_1 + \beta_2 \frac{u}{a} + \beta_3 \frac{v}{b} + \beta_4 \frac{uv}{ab} + \beta_5 \frac{u^2}{a^2} + \beta_6 \frac{v^2}{b^2} \\ \tau_{uv} &= \beta_7 + \beta_8 \frac{u}{a} + \beta_9 \frac{v}{b} + \beta_{10} \frac{uv}{ab} + \beta_{11} \frac{u^2}{a^2} + \beta_{12} \frac{v^2}{b^2} \\ \sigma_v &= \beta_{13} + \beta_{14} \frac{u}{a} + \beta_{15} \frac{v}{b} + \beta_{16} \frac{uv}{ab} + \beta_{17} \frac{u^2}{a^2} + \beta_{18} \frac{v^2}{b^2}\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\beta_4 = -2\beta_{12} a/b$$

$$\beta_5 = -\frac{1}{2}\beta_{10} a/b$$

$$\beta_9 = -\beta_2 b/a - p_u \sin v \cdot b$$

(2.9)

$$\beta_{11} = -\frac{1}{2}\beta_{16} a/b$$

$$\beta_{15} = -\beta_8 b/a - p_v \sin v \cdot b$$

$$\beta_{18} = -\frac{1}{2}\beta_{10} b/a$$

Elementet med lineær spændingsfordeling besidder i henhold til afsnit 2.5 visse fordele ved opstilling af flydebetingelserne, og vil alene blive benyttet ved ELLI-metoden.

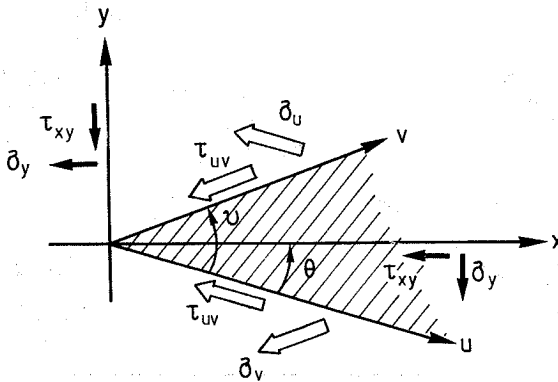


Fig. 2.14. Skævvinklet, lokalt koordinatsystem  $u, v$  og retvinklet, globalt koordinatsystem  $x, y$ .

Spændingerne  $\sigma_u$ ,  $\tau_{uv}$  og  $\sigma_v$  er givet i elementernes lokale, skævvinklede koordinatsystem. Da der ved flydebetingelserne ofte må refereres til et globalt, retvinklet koordinatsystem, hvor spændingerne benævnes  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\sigma_y$ , må der foretages en transformation. De betragtede koordinatsystemer samt de benyttede spændingsstørrelser fremgår af fig. 2.14. Ved anvendelse af ligevægtsbetragtninger kan heraf bestemmes følgende transformationsformel:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & 2\cos\theta\sin(\nu-\theta) & \cos^2(\nu-\theta) \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin(\nu-2\theta) & \sin(\nu-\theta)\cos(\nu-\theta) \\ \sin^2 \theta & -2\sin\theta\sin(\nu-\theta) & \sin^2(\nu-\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_u \\ \tau_{uv} \\ \sigma_v \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Det foregående har omhandlet bestemmelse af tilladelige ligevægts-elementer. Imidlertid er det klart, at det også har betydning, at det resulterende ligevægtligningssystem bliver så begrænset som muligt.

Ligningssystemet kan løses, d.v.s. de afhængige variable udtrykkes ved de uafhængige variable, på én af to måder:

- (1) Ligevægtsligningerne løses sammen med flydebetingelserne, idet disse også er udtrykt ved alle variable. Dette er dog kun praktisk gennemførligt ved lineær programmering.
- (2) Ligevægtsligningerne løses separat ved en rangbestemmelsesmetode - se afs. 2.3.5 -, hvorefter flydebetingelserne opstilles i de uafhængige variable.

- Denne måde benyttes ved den her udviklede metode (ELLI-metoden), idet dog de indre ligevægtsligninger (2.1) forinden benyttes til elimination af variable - se afs. 2.7.1. -

Særlig ved fremgangsmåde (1) har det derfor betydning at kunne begrænse antallet af ligevægtsligninger i forhold til antallet af uafhængige

variable. Da rangbestemmelsen for ELLI-eksemplerne i kap. II og III kræver ca. 35% af det samlede edb-forbrug, er det imidlertid ikke helt uden betydning også i tilfælde (2).

Peano [PEA, 1976] har gjort visse betragtninger over forskellige elementtyper. For en elementsamling bestemmes antallet af trekanter pr. knude til 2 og antallet af sider pr. knude til 3. Her ved får det ved (2.6) definerede lineære element  $7 \times 2 = 14$  ydre variable pr. knude, hvoraf  $4 \times 3$  er afhængige (randligevægt). Dette fører til  $14/(14-12) = 7$  variable pr. uafhængig variabel, eller det samme som er benyttet hos Zavelani [ZAV, 1973]. Der kan imidlertid forbedres på dette forhold ved at lade nogle af randspændingerne optræde som variable, således får Lysmer [LYS, 1970] et forhold på 4 ved denne fremgangsmåde. Da rangbestemmelsen udgør en mindre del af det samlede edb-behov, har ovenstående imidlertid ikke nogen væsentlig indflydelse på de konklusioner, der drages i afs. 2.7 vedr. de anvendte metoder.

De betragtninger, der er foretaget i det foregående, har alle gået på, at elementerne skulle tilfredsstille de statiske betingelser fuldstændigt. En tilnærmelsesmetode, der imidlertid ofte ses anvendt, er, at forudsætte lineære flytninger langs elementrandene og dernæst benytte arbejdsligningen til bestemmelse af hjørnekræfter udtrykt ved de indre spændinger. Dette er f.eks. anvendt af Anderheggen og Knöpfel: [AND, 1971], [A & K, 1972] [KNÖ, 1973] og [AND, 1976]. Dette giver ikke fuldstændig opfyldelse af de statiske betingelser, og man kan således komme ud for, at en funden bæreevne i virkeligheden er en øvre-værdi. Vollenweiden [VOL, 1969] anvender en anden tilnærmelse, hvor det er de indre ligevægtsligninger i et rektangulært element, der ikke er tilfredsstillede korrekt.

#### 2.3.4. Spændingsfunktions-differensmetoden (DILI)

Før elementmetodens gennembrud benyttede man ofte ved beregning



af elastiske skiver at løse problemet ved indførelse af Airy's spændingsfunktion - se f.eks. [T & G, 1951].

Ved anvendelse af denne bliver løsningen til problemet bestemt ved en 4. ordens partiel differentiaalligning (den biharmoniske ligning), der fremkommer ud fra kompatibilitetsbetingelserne, samt diverse randbetingelser.

Ved approksimering med en differensligning kan problemet bringes på numerisk form.

I det følgende vil vi se på, hvorledes spændingsfunktionen kan benyttes til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger ved idealplastiske beregninger. Medens trekantelementer kan tilpasses næsten alle geometriske flader, er forholdene lidt ugunstigere ved anvendelse af differensmetoden, idet differensnettet helst skal være regelmæssigt for at være praktisk anvendeligt. I modsat fald må helt specielle randligninger opstilles. Ved langt de fleste anvendelser kan man dog udmærket klare sig med et rektangulært net, hvor differenserne opstilles i nettets knuder. Som ved de sidst omtalte elementmetodeløsninger gælder det herved, at ligevægtsbetingelserne kun tilnærmet er tilfredsstillende.

Idet spændingsfunktionen benævnes  $U$ , benyttes følgende udtryk for spændingerne:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - V_x \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - V_y\end{aligned}\tag{2.11a}$$

$V_x$  og  $V_y$  angiver her spændingsbidrag bestemt ud fra volumenkræfterne ( $p_x$ ,  $p_y$ ), idet der gælder:

$$V_x = \int p_x dx \quad \text{og} \quad V_y = \int p_y dy\tag{2.11b}$$

Ved indsættelse af spændingerne (2.11) i ligevægtsudtrykkene (2.1) fremgår, at de indre ligevægtsligninger automatisk er tilfreds-  
stillede; d.v.s. at de ikke fører til specielle betingelser på  
U-funktionen. Langs legemets ydre afgrænsninger fører randbe-  
tingelserne derimod til nogle betingelser på U. Disse randkrav  
kan i første omgang iflg. fig. 2.15 udtrykkes ved:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_x \cos \zeta + \tau_{xy} \sin \zeta \\ t_y &= \sigma_y \sin \zeta + \tau_{xy} \cos \zeta, \end{aligned} \quad (2.12)$$

hvor  $\zeta$  er vinklen mellem x-aksen og en udadrettet normal til  
randen, og  $\bar{t} = (t_x, t_y)$  er randbelastningen udtrykt ved kompo-  
santer efter x- og y-retningen. Idet volumenkræfterne negligeres  
fås ved indsættelse af (2.11) i (2.12) følgende udtryk:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

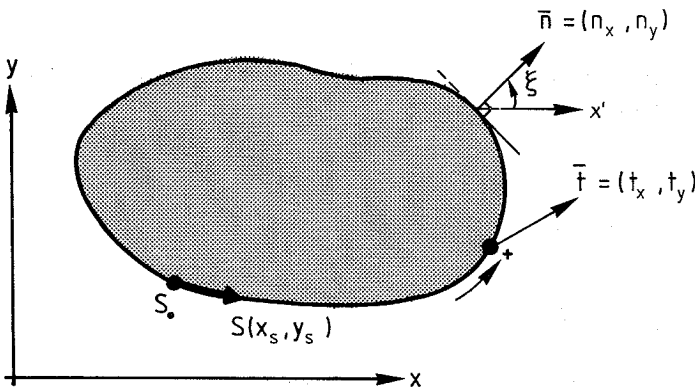


Fig. 2.15. Randbetingelser for spændingsfunktion  
( $\bar{n} = (\cos \zeta, \sin \zeta) = (dy/ds, -dx/ds)$ ).

Hermed haves kendskab til de afledede af  $U$  langs randen, og ved integration langs denne fås:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \int_{s_0}^S t_y ds \quad \text{og} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{s_0}^S t_x ds, \quad (2.15)$$

der kan tolkes som projektionssummerne på koordinataksene af randbelastningen.

Ved yderligere en integration fås

$$U = \int_{s_0}^S [(x - x_s)t_y - (y - y_s)t_x] ds, \quad (2.16)$$

der kan tolkes som værende momentet af randbelastningen. Hermed ses, at det globale ligevægtskrav kan udtrykkes som

$$U, \partial U / \partial x, \partial U / \partial y = 0 \text{ i punkt } s_0 \text{ før og efter et omløb,} \quad (2.17)$$

idet der da er såvel momentligevægt som projektligevægt i henholdsvis  $y$ - og  $x$ -retningen. Det skal bemærkes, at de herved fundne krav ikke kun gælder en kurve langs randen, men naturligvis må gælde enhver indlagt kurve.

De lokale randligevægtsligninger er fastlagt ved beregning af  $U$  langs randen.

Indføring af volumenkræfterne i udtryk (2.13) - (2.16) ændrer principielt ikke noget ved de angivne udtryk, når blot der i stedet for henholdsvis  $\sigma_x$  og  $\sigma_y$  indføres de formelle spændinger  $\sigma_x + v_x$  og  $\sigma_y + v_y$  både i det indre og langs randen.

Med dette erbestemt visse krav til funktionsværdierne for  $U$  langs randen. Når disse er tilfredsstillet, kan spændings- eller snitkraftfordelingen varieres i det indre, så den fordeling, der giver størst bæreevne eller mindst materialebehov, kan bestemmes.

I det foregående har  $U$  været betragtet som en kontinuert funktion, og de tilhørende ligninger har været givet på grundlag af differentialkoefficienter. Indføres en differensstilnærmelse, kan funktionsværdier langs randen angives i netknudepunkterne, ligesom spændingerne kan udregnes i disse punkter. Metoden er omtalt hos bl.a. Timoshenko & Goodier [T & G, 1951] og M.P. Nielsen [N, MP, 1969]. Hos M. Soave [SOA, 1967] findes yderligere en vurdering af forskellige differenssti nærmelser i forhold til en given, kontinuert funktion. Dette spiller imidlertid ikke så stor en rolle ved de plastiske beregninger, da vi først og fremmest ønsker en metode, der bevirker omtrent korrekte løsninger på bæreevne og materialebehov, medens små, lokale spændingsukorrektheder er af mindre betydning. Dette skyldes bl.a., at disse lokale spændingsukorrektheder normalt vil kunne udjævnes ved spændingsomlejring inden for en omegn omkring knudepunktet. Hertil kommer, at den ideal-plastiske teori ofte bevirker diskontinuerte spændingsfordelinger. Det må dog bemærkes, at i ganske specielle tilfælde kan ligevægtsforholdene i et enkelt punkt være af væsentlig betydning for den samlede bæreevne; i så fald bør metoden ikke umiddelbart anvendes.

Den differensmetode, der benyttes her, opstilles på basis af, at en parabolisk varierende spændingsfordeling ønskes gengivet korrekt. D.v.s. funktionsværdien i et punkt kan bestemmes, når den er givet i 3 nabopunkter. Hermed fås i det én-dimensionale tilfælde - iflg. fig. 2.16 - , at

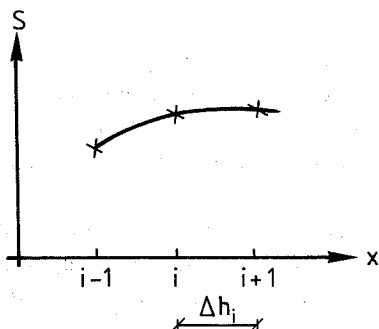


Fig. 2.16. Parabolisk varierende spændingsfunktion.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{-S_{i-1} + S_{i+1}}{2\Delta h} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{S_{i-1} - 2S_i + S_{i+1}}{(\Delta h)^2}$$

Soave [SOA, 1967] har vist, at for  $\partial S/\partial x$  og  $\partial^2 S/\partial x^2$  bliver fejlen proportional med  $(\Delta h)^2$ , når der benyttes ækvidistant inddeling, og med  $\Delta h_i$ , når der benyttes en ikke-ækvidistant inddeling.

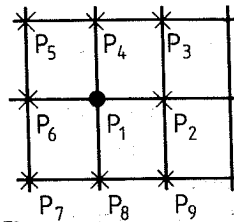
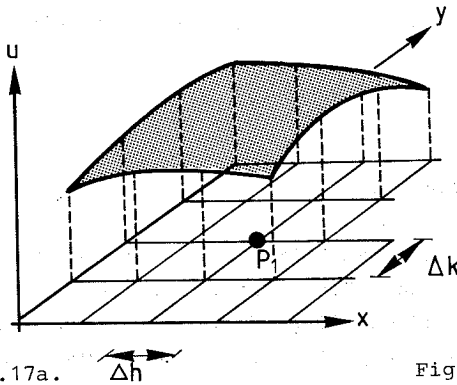


Fig. 2.17a.

Fig. 2.17b.

Fig. 2.17. Netinddeling og differenspunkter.

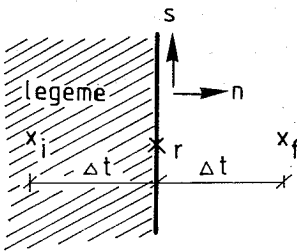
Herved fås iflg. fig. 2.17 og formel (2.11), når volumenkræfterne negligeres:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,1} &= \frac{U_4 - 2U_1 + U_8}{(\Delta k)^2} \\ \tau_{xy,1} &= \frac{(U_5 + U_9) - (U_3 + U_7)}{4 \cdot \Delta h \cdot \Delta k} \\ \sigma_{y,1} &= \frac{U_2 - 2U_1 + U_6}{(\Delta h)^2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

hvor  $\sigma_{x,1}$ ,  $\tau_{xy,1}$  og  $\sigma_{y,1}$  angiver spændingerne i pkt.  $P_1$ .

En sådan løsning er i øvrigt i [N, MP, 1969] og [KRE, 1973] vist at svare til en korrekt løsning for et system af rektangulære felter, der kun optager forskydning, og et system af stringere, der kun optager træk/tryk.

Volumenkrafternes bidrag kan som nævnt bestemmes ved at lade venstresiderne i (2.19) angive formelle spændinger  $\sigma_{x,1} + V_{x,1}$  o.s.v., og samtidig indføre denne transformation i randbelastningen.



$\sigma_{sr}$  er givet ved: 
$$\frac{U_i - 2U_r + U_f}{(\Delta t)^2}$$

Funktionsværdien i punkt  $f$  kan bestemmes som:

$$U_f = U_i + 2 \cdot \Delta t \cdot (\partial U / \partial n).$$

Fig. 2.18. Fiktive randværdier.

Hermed kan alle spændinger i det betragtede legeme bestemmes på nær  $\sigma_s$  og  $\tau_{ns}$  langs randen. Disse kan imidlertid tilnærmet bestemmes ved anvendelse af spændings-funktionsværdier i nogle fiktive ydre punkter som vist på fig. 2.18. På samme måde kan værdier bestemmes for rande, der ikke kan indpasses i det rektangulære net. Det skal dog nævnes, at der i sådanne tilfælde også kan indføres trekantformede netinddelinger, som vist i [SOA, 1967].

De funktionsværdier, der for et givet tilfælde skal bestemmes, er altså primært de egentlige randværdier, samt sekundært de fiktive punkters værdier. Da såvel de 1. som de 2. afledede giver lineære udtryk i  $U$ , fås ligesom ved elementmetoden alt i alt et lineært ligevægtssystem. M.h.t. de egentlige randværdier kan disse, når randbelastningen entydigt er givet, bestemmes ved successiv beregning ud fra formlerne (2.14), (2.15) og (2.16). Formel (2.17) fører til, at ved et omløb omkring legemet skal tilvæksterne til  $U$ ,  $\partial U / \partial x$  og  $\partial U / \partial y$  være lig med 0.

Ovennævnte metode benyttes ved de her udviklede edb-metoder, da den ikke fører til løsning af et stort ligningssystem.

Hvis der benyttes direkte opstilling af randlige vægtsligningerne, samtidig med at (2.17) stadig kræves opfyldt, fremkommer et rangbestemmelsesproblem, der er analogt til det under elementmetoden nævnte. Vedr. løsning heraf se afsnit 2.3.5.

Ved fastholdte rande, d.v.s. hvor der er frie randbelastninger, vil der ved den her anvendte metode blive benyttet indførelse af ubekendte randbelastningsværdier - se fig. 2.19 -.  $\partial U/\partial x$ ,  $\partial U/\partial y$  og  $U$  beregnes som før ud fra (2.14), (2.15) og (2.16). I øvrigt benyttes som randbelastning en konstant belastning omkring den nærmeste omegn af et punkt, som antydnet på fig. 2.19, idet det erindres, at problemet er diskretiseret til et punkt-værdibestemmelsesproblem.

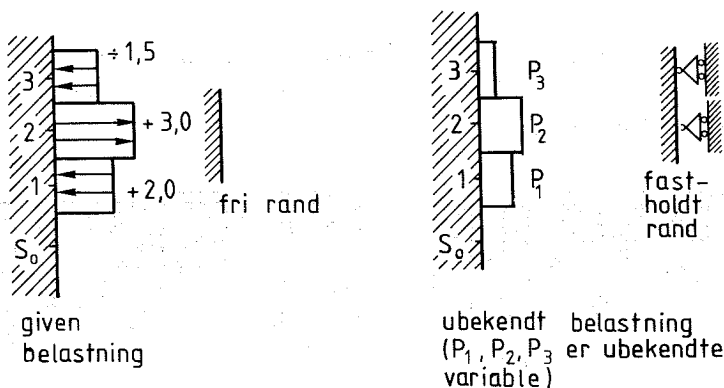


Fig. 2.19. Belastninger.

### 2.3.5 Rangbestemmelse

Når man har at gøre med et lineært ligningssystem

$$\bar{A}_{mn} \cdot \bar{x}_n = \bar{R}_m \quad (2.20)$$

med  $m$  ligninger og  $n$  variable gælder i almindelighed, at nogle af de variable  $\bar{x}_n$  ikke kan vælges frit, men må udtrykkes

ved de øvrige variable. De variable benævnes naturligt med henholdsvis de afhængige og de uafhængige variable.

Når ingen ligninger kan skrives som en linearkombination af de øvrige, fås netop  $m$  ligninger til eliminering af de afhængige variable. D.v.s. at vi har  $m$  afhængige og  $n-m$  uafhængige variable, når  $n > m$ . Det mindste antal ligninger, som kan udtrykke alle andre ligninger ved en linearkombination, benævnes ligningssystemets rang og betegnes med  $\rho$ . De udvalgte ligninger benævnes basisligninger. Kun basisligningerne kan benyttes til bestemmelse af de afhængige variable, medens de øvrige  $m-\rho$  ligninger kan bortkastes, dette under forudsætning af, at der ikke fremkommer modstridende ligninger. Antallet af afhængige variable bliver altså  $\rho$ , hvor  $\rho \leq \min \{m, n\}$ .

Bestemmelse af afhængige og uafhængige variable, angivet ved henholdsvis  $\bar{x}_2$  og  $\bar{x}_1$ , er illustreret på fig. 2.20, hvor  $\bar{a}_1$  er en regulær matrix.

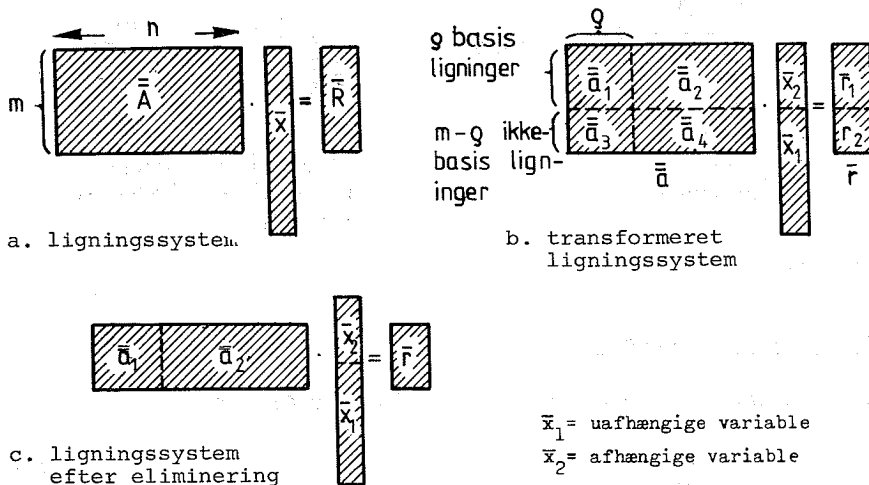


Fig. 2.20. Lineært ligningssystem og rangbestemmelse.



Principielt kan der være tale om 4 forskellige tilfælde:

- 1)  $\rho = m = n$ :  $\bar{A}$  er regulær, og  $\bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{R}$  har netop én løsning, svarende til at alle variable er givne, d.v.s. afhængige.
- 2)  $\rho < m$  og  $\rho = n$ :  $\bar{A}$  er ikke række-regulær. Hvis der ikke forekommer modstridende ligninger, fås netop én løsning, d.v.s. kun afhængige variable.
- 3)  $\rho = m$  og  $\rho < n$ :  $\bar{A}$  er ikke søjle-regulær. Der fremkommer både afhængige og uafhængige variable.
- 4)  $\rho < m$  og  $\rho < n$ :  $\bar{A}$  er hverken række- el. søjle regulær. Der fremkommer både afhængige og uafhængige variable, når der ikke forekommer modstridende ligninger.

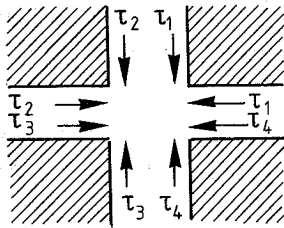
Da  $\rho$  skal være mindre end  $n$ , for at der kan forekomme uafhængige variable, vil kun tilfælde 3) og 4) kunne forekomme ved ligningssystemerne fra de foregående afsnit. Ved rationelle ligevægtsmetoder kan modstridende ligevægtsligninger ikke forekomme, men i nogle tilfælde kan der forekomme flere ligninger, der udtrykker de samme ligevægtsforhold. Årsagen hertil er som regel de særlige forhold ved forskydningskræfter i retvinklede hjørner - se fig. 2.21 - , hvor der opstilles flere betingelser, der udtrykker det samme ligevægtsforhold.

Betragt et system af  $n$  lineære ligninger med  $n$  variable:

$$\bar{a} \cdot \bar{y} = \bar{r} \quad (2.21)$$

Et sådant system kan bekvemt løses ved Gauss elimination, idet matricen  $\bar{a}$  opspaltes i en øvre og nedre matrix, d.v.s.

$$\bar{a} = \bar{L} \cdot \bar{U}, \quad (2.22)$$



ligevægts-  
ligninger:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 \\ \tau_2 &= \tau_3 \\ \tau_3 &= \tau_4 \\ \tau_4 &= \tau_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_1 = \tau_4$$

-overbestem-  
melse.

Fig. 2.21. Forskydningskræfter i retvinklet hjørne.

hvor  $\bar{\bar{L}}$  = nedre matrix og  $\bar{\bar{U}}$  = øvre matrix, - se f.eks. [NUM, 1972].  
Tilsvarende gælder der naturligvis for det på fig. 2.20c viste  
ligningssystem:

$$[\bar{\bar{a}}_1 \quad \bar{\bar{a}}_2] = [\bar{\bar{L}}] \cdot [\bar{\bar{U}} \quad \bar{\bar{U}}C] \Rightarrow \quad (2.23)$$

$$\bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{U}} \cdot \bar{\bar{x}}_2 + \bar{\bar{L}} \cdot \bar{\bar{U}}C \cdot \bar{\bar{x}}_1 = \bar{\bar{r}}_1 \Rightarrow \quad (2.24)$$

$$\bar{\bar{x}}_2 = \bar{\bar{H}} \cdot \bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{U}}^{-1} \bar{\bar{L}}^{-1} \cdot \bar{\bar{r}}_1, \quad (2.25)$$

hvor  $\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{U}}^{-1} \cdot \bar{\bar{U}}C$ .

M.h.t. bestemmelse af basis benyttes sædvanlige rækkeoperationer.  
Den benyttede fremgangsmåde er i øvrigt beskrevet i [IBM-S, 1975]  
og hos Householder [HOU, 1965].

I store ligningssystemer vil matricen  $\bar{\bar{A}}$  indeholde mange elementer  
med værdien 0. I sådanne tilfælde vil det derfor kunne være en  
fordel at behandle mindre afsnit af matricen ad gangen. En sådan  
procedure er dog ikke blevet udviklet her.

Endelig skal bemærkes, at man, hvor metoden benyttes i forbindelse  
med elastiske materialer - se Robinson [ROB, 1973], ofte p.g.a.  
den numeriske nøjagtighed har behov for at vægte matricen m.h.t.

stivheden af de forskellige elementer. Noget sådant kan også være af betydning ved plastiske elementer. Ved materialeoptimering vil de enkelte elementers fysiske forhold imidlertid være ubekendte, hvorfor hensyntagen hertil ikke er blevet overvejet.

Endelig skal bemærkes, at ligningssystemet kunne være direkte indført i LP-optimeringsproblemet. Ulempen herved er, at problemet da kun kan løses ved LP, samt at ligheds- og ulighedssystemet bliver meget større end ellers.

#### 2.4 Statisk tilladelige spændingsfordelinger ved plader og skaller.

Analogt til skiver kan man ved plader benytte henholdsvis element- og differensmetoder til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger. Når forskydningskræfterne i pladenormalens retning negligeres, kan flydebetingelserne udtrykkes alene ved momenterne, således at det er tilstrækkeligt at se på snitkraftfordelingen.

Som det fremgår af afsnit 2.1.2, har elementmetoden været anvendt ved de fleste optimeringsløsninger for plastiske plader. Således har kun Koopman & Lance [K & L, 1965] benyttet differensmetoden.

Tilsyneladende har den førstnævnte metode ført til rimeligt gode resultater ved såvel bæreevne som materialebehovsbestemmelse. En væsentlig årsag hertil er utvivlsomt, at elementrandene ved en systematisk elementinddeling ofte falder sammen med de linier, langs hvilke det er fordelagtigt at have en diskontinuitet i momentfordelingen; dette er antydnet på fig. 2.22. Hertil kommer, at materialebehovet sædvanligvis ikke er særlig følsomt overfor, om snitkræfterne spredes ud over en større zone, samt at enkeltkræfterne p.g.a. Kirchhoff-teorien optages på ret simpel vis.

Da det for skiver og plader gælder, at de udviklede metoder

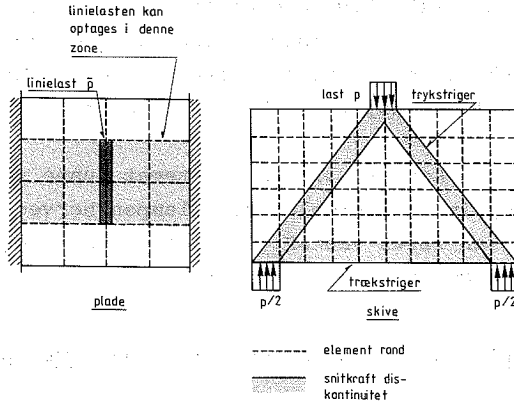


Fig. 2.22. Plade- og skiveproblem (jernbeton)

bliver dyre at anvende for selv et ret begrænset elementantal, gør sådanne forhold sig naturligvis i endnu højere grad gældende for skaller. Dette er utvivlsomt en af årsagerne til, at der hidtil ikke er udviklet generelle optimeringsmetoder for skaller.

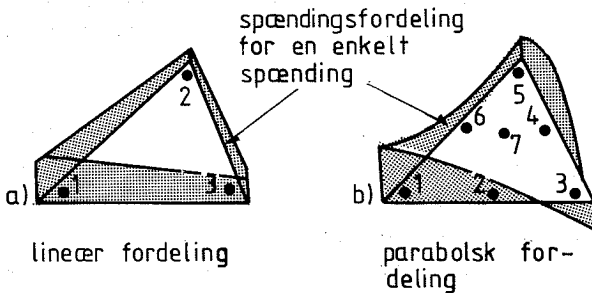
Principielt adskiller skaloptymeringsproblemet sig ikke fra de tilsvarende problemer ved skiver og plader, bortset fra at flydebetingelserne normalt ikke kan udtrykkes direkte ved skalsnitkræfterne.

## 2.5 Sikre spændingsfordelinger.

Etablering af en sikker, statisk tilladelig spændingsfordeling kræver, at flydebetingelserne er tilfredsstillet overalt i det betragtede legeme.

Ved ELLI-metoden er det nødvendigt at opskrive flydebetingelserne i et antal punkter i elementet. Benyttes elementer med lineær spændingsfordeling langs randene, er det tilstrækkeligt at opskrive flydebetingelserne i hjørnepunkterne. Årsagen hertil er, at lineær fordeling og flydebetingelsernes konveksitet sikrer,

at flydebetingelserne i så fald er opfyldt overalt i elementet - se fig. 2.23a. Ved elementer med finere fordeling langs randene, kan der derimod ikke opstilles et sådant antal flydebetingelser, at det er givet, at disse altid er overholdt overalt i elementet. Det er derfor nødvendigt at udvælge et på forhånd fastlagt antal punkter for opstilling af betingelserne, som vist på fig. 2.23b. Efter afslutning af optimeringen må man herefter checke, at betingelserne er opfyldte, og evt. nedproportionere bæreevnen eller opproportionere materialebehovet for at få en sikker spændingstilstand. Dette kan ved materialebehovsbestemmelse føre til ret uheldige løsninger.



i = udvalgte punkter for opstilling af flydebetingelsen.

Fig. 2.23. Opstilling af flydebetingelser i element.

Ved DILI-metoden er spændingerne i differenspunkterne en slags middelværdier for spændingerne i en omegn omkring punktet - se fig. 2.24. Opstilles flydebetingelserne derfor i differenspunkterne, kan der lokalt ske overskridelser af dem. Da betingelserne i middel ikke overskrides, vil dette forhold, som tidligere nævnt i afsnit 2.3.4, normalt ikke bevirke nogen væsentlig indflydelse på bæreevne eller materialebehov ved plastiske løsninger. Ved grove inddelinger kan man dog risikere, at der ikke fås strengt korrekte nedreværdiløsninger. Dette er illustreret ved visse eksempler i kap. III, der dog samtidig viser, at afvigelserne normalt er ret betydningsløse. Den nævnte ulempe i forhold til

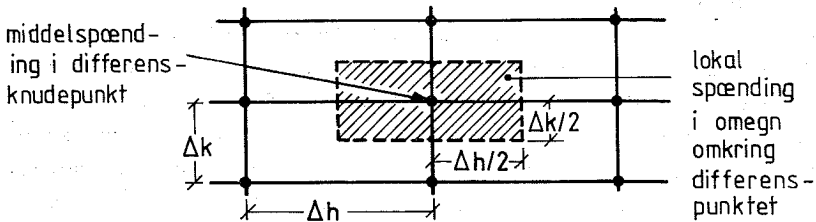


Fig. 2.24. Spændinger i et differenspunkt.

ELLI-metoden, der er en fuldt korrekt nedreværdimetode, modregnes dog til fulde ved den langt større fleksibilitet og ved de langt billigere beregninger, som det ligeledes er illustreret i kap. II og III.

Da flydebetingelserne normalt er givet ved ikke-lineære udtryk i spændingerne, fås i begge ovenstående tilfælde et ikke-lineært problem. Som det fremgår af kap. II og III, er det sædvanligvis muligt at linearisere flydebetingelserne, så disse giver lineære restriktioner. Dette vil være forudsat overalt i det følgende.

## 2.6. Optimeringsmetoder.

### 2.6.1. Optimering og optimeringsmetoder.

Der mangler nu kun en beskrivelse af den egentlige optimering af bæreevne eller materialebehov i relation til den fremgangsmåde, der blev skitseret i afsnit 2.2.

Problemstillingen er som nævnt den, at vi skal optimere nogle lineære udtryk for bæreevne eller materialebehov under forudsætning af, at ligevægts- og flydebetingelser er opfyldte.

Ved optimeringsproblemer skelner man principielt mellem 2 former, nemlig ikke-restriktive (optimering alene af et funktionsudtryk) og restriktive (optimering af funktionsudtryk, når samtidig visse

restriktioner skal være opfyldte). Det sidstnævnte problem er langt det mest komplicerede, og det fremgår af det foregående, at det her behandlede problem er af denne type. Løsning af et sådant problem kan, afhængigt af at dets opbygning, løses ved forskellige metoder. Disse kan groft opdeles i indirekte-restriktive metoder, der transformerer det givne problem til et ikke-restriktivt problem v.h.a. såkaldte straffunktioner (penalty funktioner), og direkte-restriktive metoder. Af direkte-restriktive metoder kan nævnes: gradientmetoder, tilladelige retningers metoder og lineær programmering, hvor de to førstnævnte ligesom straffunktionsmetoderne i nogle tilfælde kan løse ikke-lineære problemer.

Ud over de her nævnte metoder har man et væld af specielle metoder og varianter af de her omtalte metoder, se f.eks. [G & Z, 1973] og [FOX, 1971].

I specielle tilfælde kan man benytte de såkaldte Monte Carlo-metoder, der principielt er baseret på beregning af funktionsværdier i tilfældigt udvalgte punkter. Disse metoder er dog ikke egnet til komplicerede, restriktive problemer.

Valget af optimeringsmetode for det givne problem synes af ovenstående at være meget frit. Ud over de egentlige optimeringskrav er det også nødvendigt at kræve, at den anvendte metode er stabil, forstået på den måde at den altid bestemmer det egentlige ekstremum (ikke lokale ekstrema). Endvidere skal metoden i det aktuelle tilfælde kunne behandle store problemer, d.v.s. med mange restriktioner og variable. Dette lægger meget strenge bånd på valget af optimeringsmetode, og på nuværende tidspunkt synes kun metoder baseret på lineær programmering velegnede - jvf. White [WHI, 1973].

Da det normalt er let at liniarisere de indgående flydebetingelser til lineære restriktioner, og såvel objektfunktion som ligevægtsbetingelser er lineære, benyttes derfor i det aktuelle tilfælde lineær programmering. Der anvendes IBM's store og velafprøvede MPS(x)-system - se [IBM-M, 1977].

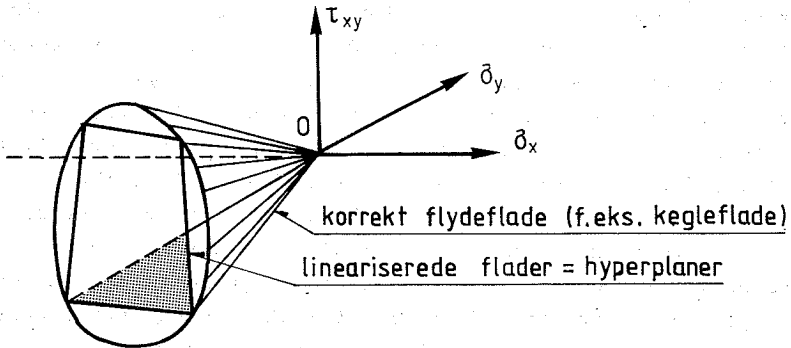


Fig. 2.25. Total linearisering af flydebetingelse.

Flydebetingelserne totallineariseres, hvormed menes, at de afgrænses fuldstændig ved lineære planer eller hyperflader som antydte på fig. 2.25.

En anden nærliggende mulighed, der ofte ses anvendt ved andre problemer, er at linearisere successivt. Herved forstås, at der kun benyttes én linearisering for flydebetingelsen i hvert punkt, idet spændingerne øges trinvis, og lineariseringen rettes ind efter hvert iterationstrin. Denne metode synes imidlertid at være ret uanvendelig i denne sammenhæng. For det første fordi flydebetingelserne ofte har knæk, og er givet ved flere funktionsudtryk. For det andet fordi det ved bæreevnebestemmelse er vanskeligt at iterere sig frem til de nye spændinger, da disse er afhængige af, om flydebetingelserne er aktive. Endelig er det ved materialebehovsbestemmelse på det nærmeste umuligt at skønne flydebetingelsens form (armeringsparametrene). Lysmer [LYS, 1970] angiver således også, at metoden er ret ustabil ved bæreevnebestemmelse.

Ved linearisering af flydebetingelserne indføres imidlertid betydelig flere restriktioner end det oprindelige antal ikke-lineære restriktioner, som det fremgår af kap. II og III. En forbedring



af ikke-lineære optimeringsmetoder kan derfor i fremtiden føre til, at det bliver fordelagtigere at anvende sådanne.

At valget af lineær programmering er rigtig bestyrkes af, at hovedparten af tidligere udviklede idealplastiske optimeringsmetoder også har været baseret på denne optimeringsmetode - se afsnit 2.1.2 -.

### 2.6.2 Lineær programmering

Problemer, der kan behandles ved lineær programmering, er problemer, der kan formuleres som:

Bestem løsningsvektoren  $\bar{x}$ , så

OBJEKTFUNCTION:  $F(\bar{x}) = \bar{C} \cdot \bar{x} \rightarrow \text{optimum}$   
(d.v.s. bestemmer maximum el. minimum)

RESTRIKTIONER:  $\bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{R}$   
( $\leq$ ) (2.26)

VARIABLE:  $\bar{x} \geq 0$

Lineær programmering, i det følgende forkortet LP, kan altså bestemme den optimale løsning for en lineær objektfunktion (d.v.s. finde maximum eller minimum), når samtidig et antal lineære restriktioner er opfyldte. Restriktionerne kan enten være ligheds- eller ulighedsbetingelser.

Det fremgår af (2.26), at de variable  $\bar{x}$  skal være positive. Denne begrænsning kan imidlertid let opfyldes ved at indføre nye variable, idet en transformation af formen  $x_i = x'_i - u_i$  sikrer, at de variable  $x_i$  kan blive negative, selvom  $x'_i$  og  $u_i$  altid er positive. For flere variable, der både kan være positive og negative, kan det være fordelagtigt kun at indføre en u-variabel, således at  $x_i = x'_i - u$ ,  $x_{i+1} = x'_{i+1} - u$  o.s.v. Dette bevirker færre variable og dermed billigere løsning.

En speciel egenskab ved LP, nemlig den såkaldte primal-dual egenskab, vil blive benyttet i det følgende. Denne egenskab kan beskrives ved følgende: - Til ethvert maximeringsproblem, det primale problem, eksisterer et dualt minimeringsproblem og vice versa. Problemerne giver samme objektfunktionsværdi og bestemmer de samme variable - . Dette kan opskrives således:

Primal-dual egenskaben:

$$\begin{aligned}
 \text{PRIMAL: } & \max F = \bar{C} \cdot \bar{x}, \\
 & \text{når } \bar{A} \cdot \bar{x} \geq \bar{B}, \\
 & \text{og } \bar{x} \geq \bar{0} \\
 & (\max F \text{ og } \bar{x} \text{ bestemmes direkte,} \\
 & \bar{y} \text{ er såkaldte slack-variable}). \\
 \\
 \text{DUAL: } & \min G = \bar{B}^T \cdot \bar{y}, \\
 & \text{når } \bar{A}^T \cdot \bar{y} \leq \bar{C}, \\
 & \text{og } \bar{y} \geq \bar{0} \\
 & (\min G \text{ og } \bar{y} \text{ bestemmes direkte,} \\
 & \bar{x} \text{ er såkaldte slack-variable}).
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

$$\max F = \min G.$$

Årsagen til, at dette princip anvendes, er, at beregningstiden for et LP-program er omtrent proportional med  $m^2 n^+$ , hvor  $m$  er antallet af restriktioner, og  $n$  er antallet af variable. Når antallet af restriktioner er større end antallet af variable ( $m > n$ ), er det derfor fordelagtigt at udnytte ovennævnte. Denne betingelse er normalt opfyldt for de problemer, der behandles med de her udviklede metoder.

En af de væsentligste fordele ved LP er, at det er muligt at vise, at den optimale løsning altid ligger i restriktionernes skæringspunkt (vertex punkter). D.v.s. at en optimal løsning altid kan bestemmes ud fra et endeligt antal beregninger. Ved den såkaldte simplex metode benyttes en fremgangsmåde, der hele tiden arbejder sig så direkte som muligt frem mod dette optimum.

---

+) Edb-beregningstid  $\approx k \cdot n \cdot m^2$ . MPSX ved NEUCC giver  $k \approx 1.5 \cdot 10^{-5}$  sek CPU ved en intensitet på 60% (60% af pladserne forskellige fra 0).

Ud over de rent lineære problemer er det med MPSX programkomplekset muligt at løse nogle ikke-lineære problemer. Det drejer sig bl.a. om heltalsproblemer, d.v.s. problemer med diskrete variable. Beregningerne bliver i sådanne problemer ganske betragteligt dyrere, og disse vil ikke blive nærmere berørt her, selv om det f.eks. kunne gøre det muligt at bestemme diskrete materialestørrelser.

Det teoretiske grundlag for LP er beskrevet hos Gass [GAS, 1964], medens en kort introduktion f.eks. er givet hos Holst [HOL, 1972].

## 2.7 De numeriske metoder og vurderinger

### 2.7.1 De numeriske metoder

På grundlag af de retningslinier, der er givet i afsnit 2.2, 2.3, 2.5 og 2.6 for anvendelse af nedreværdiprincippet, er udviklet 2 edb-orienterede beregningsmetoder. Disse er m.h.t. bestemmelse af den statisk tilladelige spændingsfordeling baseret på henholdsvis ligevægtselementmetoden - se afsnit 2.3.3 -, og spændingsfunktions-differensmetoden - se afsnit 2.3.4 -.

Begge metoder er bygget op over 3 trin som angivet i det følgende diagram 2.1.

I første trin bestemmes en statisk tilladelig spændingsfordeling for problemet, i det andet gøres denne "sikker", ved at kræve flydebetingelserne overholdt. Med disse 2 trin har vi fastlagt en løsning på den sikre side i henhold til nedreværdiprincippet. Da vi imidlertid ønsker at finde den bedste løsning, d.v.s. den der ligger nærmest den eksakte, må vi sluttelig foretage en optimering af de mulige løsninger. Dette udføres i 3. og sidste trin. Ved selve optimeringen benyttes som nævnt IBM's MPSX-program - [IBM-M, 1972], der er skrevet i specielt edb-sprog. Ved den øvrige del af programmene benyttes edb-sproget PL/I.

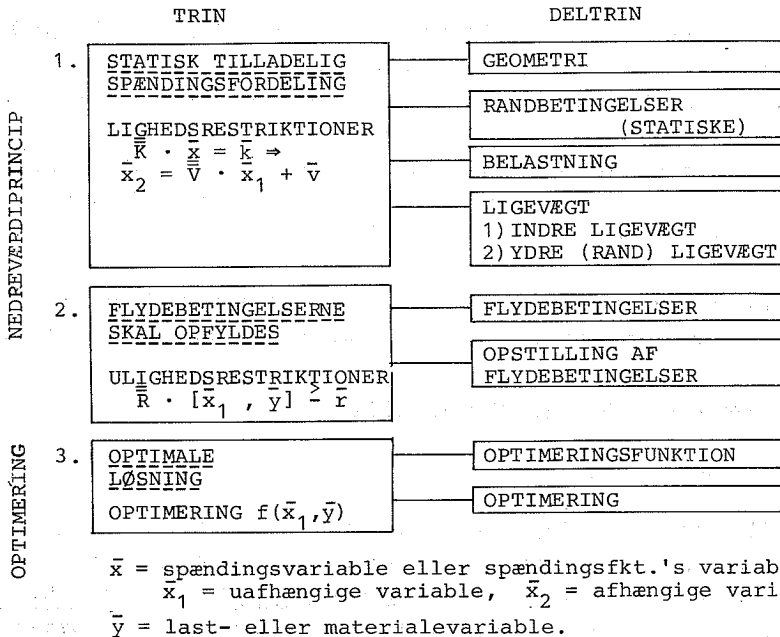


Diagram 2.1. Programopdeling.

I fig. 2.26 er problematikken vist efter at de afhængige spændingsvariable er elimineret. Der er tale om dels et bæreevneproblem, hvor bæreevnen maximeres, dels et designproblem, hvor materialebehovet minimeres.

Ved bæreevne-problemet er materialet, materialedimensionerne og evt. nogle laste givne, medens de uafhængige spændingsvariable  $\bar{x}_1$  og bæreevnevariablene  $\bar{y}$  skal bestemmes. Objektfunktionen udtrykker en sum af en eller flere bæreevnevariable  $y_1$  evt. multipliceret med passende faktorer.

Ved designproblemet er alle laste og evt. nogle materialestørrelser givne, medens de uafhængige spændingsvariable  $\bar{x}_1$ , og materialevariablene  $y_1$  skal bestemmes. Objektfunktionen udtrykker en sum af en eller flere materialeparametre multipliceret med passende faktorer (arealer m.v.). Det bemærkes, at det ret let er muligt

at tage hensyn til flere lasttilfælde samtidigt, idet dette blot svarer til at bestemme de farligste højresider for restriktionerne.

OBJEKTFUNCTION  $F = [\bar{o} \ \bar{f}] \cdot [\bar{x}_1 \ \bar{y}]^T$ , hvor  $\bar{o}$  = nulvektoren  
 bæreevne-udtryk  $\Rightarrow \max F$   
 materialebehov-udtryk  $\Rightarrow \min F$

RESTRIKTIONER

$$\begin{bmatrix} \bar{R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \ \bar{y} \end{bmatrix}^T \geq \begin{bmatrix} \bar{r} \end{bmatrix}$$

Fig. 2.26. Optimering af bæreevne eller materialebehov.

Problemet i fig. 2.26 løses endelig ved anvendelse af primal-dual egenskaben, da antallet af restriktioner er større end antallet af variable.

I diagram 2.2. er givet en oversigt over, hvorledes den statisk tilladelige spændingsfordeling bestemmes ved ELLI-metoden (lige-vægts-elementmetoden), idet der udledes et antal statisk uafhængige eller overtallige spændingsvariable, d.v.s. frie variable.

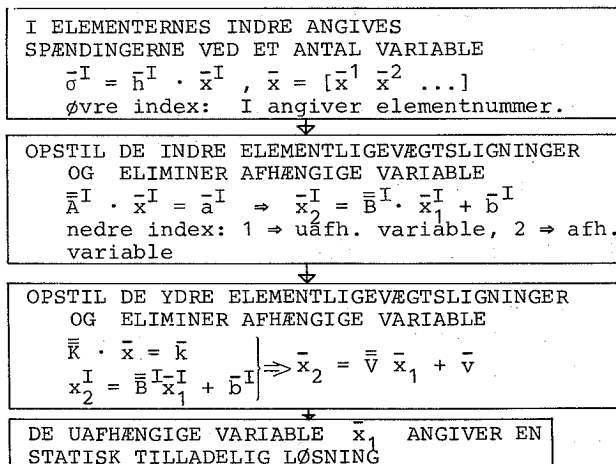


Diagram 2.2. ELLI-metoden.

Tilsvarende er i diagram 2.3 angivet, hvorledes en sådan fordeling bestemmes for DILI-metoden (spændingsfunktions-differensmetoden).

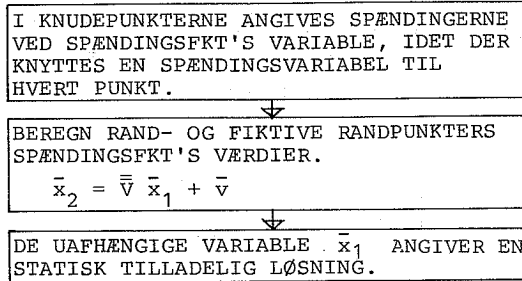


Diagram 2.3. DILI-metoden.

Det skal endelig omtales, at man altid må sikre sig, at det lineære optimeringsproblem er passende numerisk udformet. Dette er særlig vigtigt, når der som her kun benyttes enkeltpræcision ( $\sim$  nøjagtighed på  $10^{-6}$ ), ellers kan fås numeriske problemer.

Ved ELLI-metoden benyttes som nævnt kun elementer med lineær spændingsfordeling, og der benyttes hovedsagelig den elementkombination som byggeelement, der er vist på fig. 2.10d. Ved andre byggelementer må udvises agtpågivenhed ved randene at hensyn til spændingsoptagelsen - jvf. afsnit 2.3.3.

Ved DILI-metoden benyttes kun ækvidistant netinddeling i hver af akseretningerne;  $\Delta h$  og  $\Delta k$ , der betegner maskevidden i henholdsvis x- og y-retningen, kan dog godt være forskellige.

### 2.7.2 Vurdering af metoderne

I det følgende er givet en vurdering af de udviklede metoder dels på grundlag af dette kapitel, og dels på grundlag af resultaterne i kap. II og III.

ELLI-metoden er udviklet, så den altid giver sikre nedreværdiløs-

ninger, ligesom den let kan tilpasses ikke-rektangulære legemer. DILI-metoden giver ikke nødvendigvis helt sikre nedreværdiløsninger, da den lokale ligevægt ikke er 100% i orden. Desuden kan den ikke uden videre tilpasses ikke-rektangulære områder. Disse forhold spiller dog normalt ingen rolle, da den globale ligevægt er tilfredsstillende, og da mange legemer kan tilpasses et rektangulært.

Ved praktiske problemer giver ELLI-metoden normalt ret dårlige løsninger, da snitkraftfordelingen bliver meget "stiv". DILI-metoden er derimod mere fleksibel, og giver ved såvel jernbetonberegningerne som stribefundamentsberegningerne i kap. II og III fornuftige og gode løsninger, samtidig med at den er betydelig billigere at bruge. Det sidste skyldes, at der forekommer langt flere restriktioner og ligevægtsberegninger ved ELLI-metoden.

De elementmetodevarianter, der er omtalt i slutningen af afsnit 2.3.3, opfylder ikke altid ligevægtsligningerne korrekt, d.v.s. metoderne har samme ulempe som DILI-metoden. Umiddelbart kan deres fordele og ulemper i forhold til denne ikke bestemmes, bl.a. fordi der findes flere forskellige elementtyper - jf. [AND,1976] -. En fordel ved disse metoder er dog, at de sædvanligvis lettere kan tilpasses geometrien.

En mulighed, der ofte ses anvendt i forbindelse med elementmetodens anvendelse på elastiske konstruktioner, er at opdele i delstrukturer, hvorved problemet numerisk set får et noget mindre omfang - se f.eks. Zienkiewicz [ZIE, 1971]. Denne mulighed kan ikke udnyttes i plastiske tilfælde, da problemet ikke er lineært, idet der sker en brat ændring ved overgang fra passiv restriktion til aktiv eller vice versa. En metode, hvor der først benyttes en optimering over en grov inddeling, og hvor dernæst nogle af parametrene fastholdes i en finere inddeling er også uegnet, da dette blot betyder finpudsning på en i forvejen dårlig løsning. Endelig er det heller ikke anvendeligt at forsøge at undlade opstilling af nogle af restriktionerne, da problemets ikke-linearitet bevirker, at det er umuligt at overskue alle konsekvenserne.

Disse forhold taler derfor også til gunst for DILI-metoden, når denne tilmed er betydeligt billigere at anvende.

Af dette og det foregående kan det konkluderes, at ELLI-metoden normalt er ret uegnet ved ideal-plastiske beregninger, hvorimod DILI-metoden ofte giver gode resultater. Dette synes særlig at gælde ved anvendelser på stribefundamenterne.

Ovenstående forhold gælder, når der betragtes generelle metoder, hvor elementer eller differensnet indlægges uafhængigt af den resulterende spændingsfordeling. Når der ved elementinddelingen søges taget hensyn til, hvorledes spændingerne fordeles, vil ELLI-metoden imidlertid udmærket kunne anvendes ved bestemmelse af sikre nedreværdiløsninger.



## KAPITEL II. BESTEMMELSE AF BÆREEVNE/ARMERINGSBEHOV FOR JERNBETONSKIVER OG -SKALLER

### 1. JERNBETONSKIVER OG -SKALLER OG DERES BÆREEVNE/ARMERINGSBEHOV

I dette afsnit er redegjort for bestemmelse af bæreevne/armeringsbehov ved fladeformede jernbetonlegemer (skiver, plader og skaller). Der omtales dels den traditionelle bestemmelse og dels tidligere anvendelser af numeriske optimeringsmetoder.

#### 1.1 Jernbetonkonstruktioners bæreevne/armeringsbehov

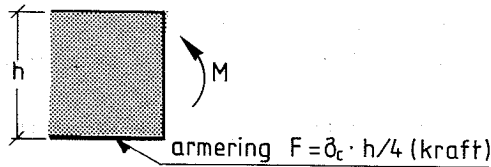
Jernbeton er et kompositmateriale bestående af beton med indlagte armeringsstænger eller tråde af stål. Af grundmaterialerne er stål langt det dyreste, hvorfor man i høj grad interesserer sig for begrænsning af armeringsmængden. Sædvanligvis er betondimensionerne for en jernbetonkonstruktion med givne belastninger bestemt dels ud fra geometriske hensyn og dels ud fra krav til stivheden. Derfor er det meget ofte af interesse at bestemme den mindste armeringsmængde uafhængigt af betonmængden, hvilket simplificerer optimeringsproblemet en del, idet den ydre geometri og belastningerne hermed er givet for det betragtede legeme. Dette vil være forudsat gældende i det følgende.

Ved bestemmelse af armeringsbehovet bør der ved en korrekt beregning tages hensyn til, at kompositmaterialet har krum arbejdslinie, som det fremgår af afsnit 2.1. Ved praktiske jernbetonberegninger er det imidlertid nødvendigt at forenkle fremgangsmåden. En rimelig tilnærmelse i brudtilstanden er således at betragte jernbeton som havende ideal-plastisk opførsel eller at benytte en lineær-elastisk betragtning kombineret med en brudbetingelse. Den førstnævnte tilnærmelse vil blive benyttet her.

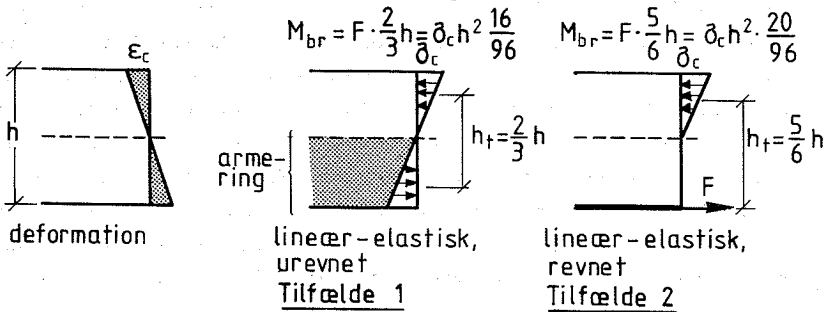
Årsagen til anvendelse af den ideal-plastiske tilnærmelse er dels, at jernbeton besidder en vis plasticitet som angivet i afsnit 2.1 og dels, at det sædvanligvis er en fordelagtigere

tilnærmelse end den lineær-elastiske med hensyn til armeringsbehov og bæreevne. Dette er illustreret på fig. 1.1, hvor samme armeringskraft fører til forskellige brudmomenter. Til fordel for anvendelse af den ideal-plastiske tilnærmelse taler endvidere, at medens det synes meget vanskeligt at udvikle optimeringsmetoder til bestemmelse af den fordelagtigste armering i

a) betonbjælke



b) lineær-elastiske tilnærmelser for beton



c) ideal-plastisk tilnærmelse for beton

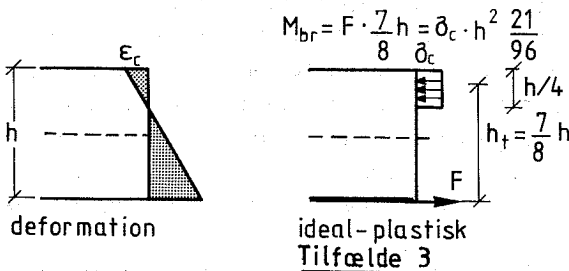


Fig. 1.1. Brudmoment for jernbetonbjælke ved forskellige tilnærmelser.

et elastisk legeme, er dette muligt ved et ideal-plastisk legeme, som det følgende vil vise. Desuden kan der ofte udvikles simplere håndregningsmetoder på basis af den ideal-plastiske teori end på basis af den elastiske - jf. pladeberegninger (afsnit 1.2).

Armeringsbestemmelsen er normalt væsentlig mere kompliceret end bæreevnebestemmelsen, idet materialet kan variere fra punkt til punkt, og derfor vil hovedsageligt alene det førstnævnte problem blive omtalt i det følgende.

## 1.2 Metoder til bestemmelse af bæreevne/armeringsbehov for jernbetonskiver og -skaller

### 1.2.1 Sædvanlige metoder

Ved bestemmelse af armering i jernbetonskiver kan forskellige fremgangsmåder anvendes. De fleste er baseret på simplificering af skivens statiske virkemåde og evt. superposition af flere lasttilfælde. Herudover suppleres sædvanligvis med en empirisk bestemt minimumsarmering. Kan skiven tilnærmet betragtes som en høj bjælke, bestemmes hovedarmeringen således ud fra en bjælkeberegning, og der indlægges yderligere en lodret og evt. vandret fordelingsarmering.

For vilkårlige belastninger anvendes også ofte 2-dimensionale elastiske metoder (elementmetoder, spændingsopstiske metoder m.fl.) til bestemmelse af skivens snitkraftfordeling, idet de elastiske konstanter skønnes. Armeringen kan herefter indlægges ud fra empiriske udtryk, ud fra armeringsudtryk fastlagt ved hjælp af jernbetonskivers flydebetingelse - se 2.6-7 - eller ud fra numeriske iterationsberegninger, der tager hensyn til såvel betonens som armeringens konstitutive udtryk - se f.eks. Berg [BER, 1975]. Metoden giver naturligvis i alle tilfælde anledning til for store armeringsbehov, da man strengt taget må indlægge armering overalt, hvor der er fundet behov for det, jf. fig. 1.1, tilfælde 1. Der er altså ikke direkte

mulighed for at koncentrere armeringen og betonspændingerne de fordelagtigste steder, som illustreret i tilfælde 3 på fig. 1.1.

Ofte transformeres den fordelte armering til en koncentreret, dette gælder f.eks. for tilfælde 1 og 2 på figuren, men kun når snitkraftfordelingen kan varieres, samtidig med at armeringen indlægges, er det muligt at bestemme den fordelagtigste armering. Endvidere er det ikke umiddelbart muligt at afpasse spændingsfordelingen, således at den armering, der er bestemt for et lasttilfælde, kan udnyttes fuldt ud ved et andet lasttilfælde.

Den ovenfor omtalte armeringsbestemmelse er baseret på en elastisk snitkraftfordeling. Beregningsmetoder for jernbetonskiver betragtet som ideal-plastiske konstruktioner har hidtil været lidet anvendt, selvom fordelene skulle være indlysende.

Ud fra det, der nedenfor er omtalt om plader, synes det mest nærliggende at anvende øvreværdiprincippet som grundlag for en sådan metode. Når der ønskes mulighed for en kraftigt varierende armering henover legemet, er det imidlertid nødvendigt at bestemme en statisk tilladelig snitkraftfordeling overalt - se også kap. I, afsnit 2.1.2. Ved skiver haves sædvanligvis en varierende armeringsfordeling, og desuden har det vist sig, at resultatet for sådanne skiveberegninger ofte har været følsomt over for valg af brudfigur, således at der er blevet fundet for store bæreevner. Da der samtidig ikke som ved pladeberegninger haves en ekstra sikkerhed - membranvirkning m.v. -, synes det ved skiver at være mest rimeligt at anvende nedreværdiprincippet. Der må i så fald normalt anvendes numeriske beregninger på grund af besværet med at bestemme en statisk tilladelig snitkraftfordeling.

Medens rene ideal-plastiske beregningsmetoder praktisk talt ikke har været anvendt ved jernbetonskiver, har man tidligt benyttet sådanne metoder for plader. Således har den af Ingerslev og K.W. Johansen udviklede brudlinieteori, der er baseret på

øvre værdiprincippet - se [JOH, 1943] -, været en af de mest anvendte beregningsmetoder ved såvel armerings- som bæreevnebestemmelse. Ved anvendelse af metoden benyttes et kinematisk muligt brudliniemønster, hvorefter indre og ydre arbejde beregnes. Når disse sættes lig med hinanden, og ligningen løses m.h.t. bæreevnen, fører dette til bæreevner på den usikre side, et forhold, der som nævnt, har vist sig at være af relativ lille betydning ved plader på grund af reserver som membranvirkning m.v.

Anvendelse af nedreværdiprincippet har i de senere år også været anvendt, normalt dog simplificeret i form af strimmelmetoden, der er udviklet af Hillerborg [HIL, 1974]. Elasticitets-teoretisk bestemmelse af momentfordelingen og efterfølgende bestemmelse af armeringen eller spændingerne, ud fra en revnet-elastisk spændingsfordeling eller en revnet-plastisk spændingsfordeling, er dog sandsynligvis stadig den hyppigst anvendte fremgangsmåde ved plader.

For jernbetonskaller gælder, som for skiver, at man normalt er henvist til at bestemme armeringsmængden ud fra en snitkraftfordeling bestemt ved elastiske metoder. Øvre værdimetoden har i vid udstrækning været søgt anvendt på forskellige skaltyper - se f.eks. [O & S, 1964], men har ikke vist sig særlig anvendelig. For cylinderformede skaltage har den såkaldte stringermetode, der er udviklet af H. Lundgren [LUN, 1949], været en del anvendt. Denne metode er principielt en nedreværdimethode.

#### 1.2.2 Numeriske optimeringsmetoder på ideal-plastisk grundlag

Nedenfor er givet en sammenfatning af anvendelse af numeriske metoder på jernbetonkonstruktionselementer, der kan regnes at have idealplastisk opførsel. Konklusionerne er draget ud fra kap. I, afsnit 2.1.2, hvor en mere generel beskrivelse er givet.

Armeringsbestemmelse ved brug af numeriske optimeringsmetoder har først og fremmest været benyttet ved bjælker og rammer.

Dette skyldes, at dels er disse elementer relativt enkle, dels er problematikken ikke særlig forskellig fra den, der gælder for homogene materialer. Der har ved de fleste løsninger alene været taget hensyn til de bøjende momenter.

For jernbetonplader er udviklet flere metoder til bæreevnebestemmelse, ligesom de fleste af de metoder, der er udviklet for andre ideal-plastiske materialer, kan benyttes. H. Pedersen [PED, 1974] har dog udviklet en elementmetode, der også kan bestemme armeringsmængden for en given belastning.

Ved jernbetonskiver har anvendelsen af optimeringsmetoder været mere sparsom. Ingen har således direkte behandlet jernbetonskiver, men de fleste af de bæreevnetoder, der er udviklet for andre ideal-plastiske materialer, kan dog tillempes. Årsagen til den ringe interesse for skiver skyldes utvivlsomt, at de ikke så ofte som f.eks. plader kræver stort armeringsbehov, samt at snitkraftfordelingen ofte varierer mere i skiver end i plader.

Endelig skal bemærkes, at for skaller er overhovedet ikke udviklet numeriske optimeringsmetoder.

## 2. FLYDEBETINGELSER FOR JERNBETONSKIVER OG -SKALLER

Jernbeton er sammensat af beton, der har sprødt brud, og armering, der har sejt brud og næsten ideal-plastisk opførsel i brudtilstanden. På trods af at betonen praktisk talt ikke besidder plasticitet, udviser det sammensatte materiale normalt ret plastiske egenskaber i brudtilstanden.

For skiver og plader er tidligere udviklet analytiske udtryk for flydebetingelserne; for skaller derimod findes ikke færdige udtryk, og numerisk bestemmelse af flydebetingelsen må benyttes ud fra opdeling i skivelag.

## 2.1 Jernbetons fysiske opførsel

Vi vil nu specielt se på, hvorledes jernbeton-skælflader opfører sig, dvs. konstruktionselementer begrænset af 2 parallelle eller næsten parallelle flader med lille indbyrdes afstand. Armeringen regnes indlagt parallel med de afgrænsende flader.

Grundbestandelene beton og armeringsjern vil normalt udvise en opførsel som skitseret ved arbejdslinierne på fig. 2.1, idet betonen alene regnes trykpåvirket. Det fremgår, at betonen praktisk talt ikke udviser plastiske egenskaber. I starten haves en næsten konstant hældning af arbejdslinien, men efterhånden aftager hældningen ret voldsomt, således at bruddet bliver sprødt. I modsætning hertil er der ved armeringsjernet udpræget tale om et sejt brud, idet der optræder flydning, når tøjningerne har nået en vis værdi.

For beton armeret med stål fås et kompositmateriale, der i modsætning til almindelig beton besidder visse plastiske egenskaber. Kun hvor der er en jævnt fordelt armering i 2 retninger fås dog en virkelig materialeforbedring, plasticitetsmæssig set, medmindre der hovedsagelig optræder træk i én armeringsretning.

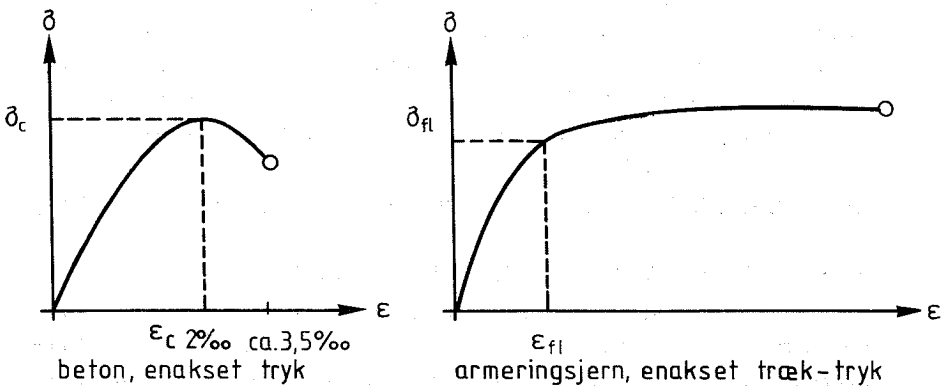


Fig. 2.1. Arbejdslinier for beton og armeringsjern

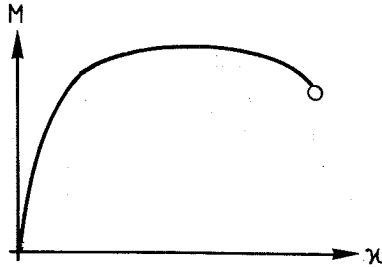


Fig. 2.2. Arbejdslinie for momentpåvirket jernbetonbjælke.

Hvor jernbetonen alene er trykpåvirket, er materialeforbedringen ikke så udpræget.

En typisk arbejdslinie for jernbeton er vist på fig. 2.2.

Den ideal-plastiske tilnærmelse har ved bjælker og plader vist sig meget berettiget, når visse tillægskrav indføres. Ved skiver, hvor et trykpåvirket tværsnits deformationsegenskaber ofte er af afgørende betydning, må imidlertid kræves større forsigtighed ved anvendelse af denne forudsætning. Af [N,MP, 1969] fremgår imidlertid, at forudsætningen i mange tilfælde er verificeret som brugbar. Ved specielle tilfælde synes det derimod rimeligt at nedsætte betonens beregningsmæssige brudstyrke i forhold til den givne styrke. En sådan fremgangsmåde er også blevet benyttet af Bræstrup, Nielsen, Bach & Jensen [B m.fl. 1-2, 1976] ved plastisk beregning af jernbetonbjælkens forskydningsbæreevne. Dette forhold er iøvrigt omtalt i afsnit 3.1.1.

## 2.2 Jernbetonskiver og -skaller som ideal-plastiske legemer

### 2.2.1 Jernbeton som ideal-plastisk materiale

Af det foregående fremgår, at jernbeton tilnærmeth kan betragtes som et ideal-plastisk materiale ved beregninger i brudtilstanden. Derfor er det nødvendigt at have kendskab til de respektive flydebetingelser. For skiver og plader kendes analytiske udtryk for disse betingelser, udtrykkene er angivet i hen-



holdsvis afsnit 2.2.2 og 2.2.3. For jernbetonskaller eksisterer endnu ikke færdige analytiske udtryk. I stedet må benyttes numeriske løsninger, f.eks. ud fra opdeling i skivelag.

Ved de ideal-plastiske betragtninger benyttes den på fig. 2.3 viste beton-brudbetingelse og armeringsarbejdslinien, hvor  $\sigma_c$  er betonens én-aksede trykstyrke, og  $\sigma_F$  er armeringens trækflydespænding.

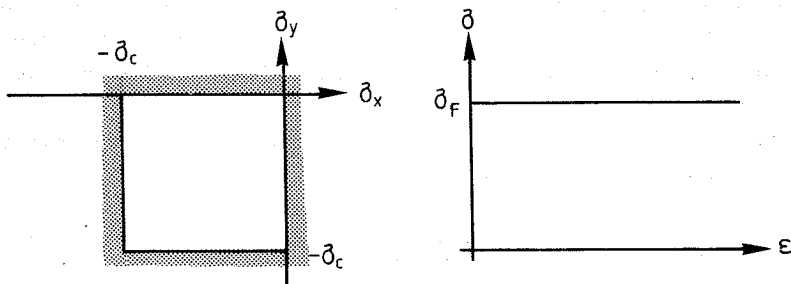


Fig. 2.3. Ideal-plastiske forudsætninger ved jernbeton

### 2.2.2 Flydebetingelse og deformationsforhold for skiver

For jernbetonskiver har M.P. Nielsen [N,MP, 1969] udviklet såvel en flydebetingelse som udtryk for armeringsbehovet ved givne spændinger. Idet der betragtes et skiveudsnit, som vist på fig. 2.4, er flydebetingelsen givet ved de på fig. 2.5 viste flyde-

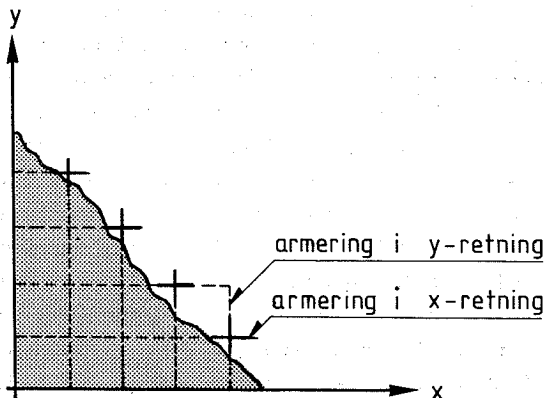


Fig. 2.4. Jernbetonskive-udsnit.

flader i et ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) koordinatsystem.  $\phi_x$  og  $\phi_y$  er her armeringsgraderne i de ortogonale x- og y-retninger,  $\sigma_c$  er betonstyrken, og  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  er henholdsvis normalspændingerne i x- og y-retningen og forskydningsspændingen.

Flydebetingelserne er udviklet under hensyntagen til, at betons brudbetingelse er som vist på fig. 2.3, og at der kun opstår træk eller tryk i armeringsstængerne, dvs. disse regnes ikke at kunne optage forskydning. Det skal bemærkes, at der her og i det følgende ikke er regnet med optagelse af trykspændinger i armeringen. Dette er alene gjort for at simplificere beregningerne.

For flade I og IV - jf. fig. 2.5 - er flydebetingelserne givet ved følgende analytiske udtryk:

$$-(\phi_x \sigma_c - \sigma_x)(\phi_y \sigma_c - \sigma_y) + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (2.1)$$

og

$$-(\sigma_c + \sigma_x)(\sigma_c + \sigma_y) + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (2.2)$$

Udtrykkene for de øvrige flader kan udledes heraf ved nogle parallelforskydninger af randkurverne.

Ved ren forskydningspåvirkning kan betonspændingen bestemmes som  $\sigma_b = (\phi_x + \phi_y) \sigma_c$ , når armeringen antages påvirket til flydning. Er  $\phi_x + \phi_y = 1$ , er der også brud i betonen. Er  $\phi_x + \phi_y > 1$  vil der ikke forekomme flydning i begge armeringsretninger. Heraf følger, at for store armeringsgrader vil jernbetonskivernes flydebetingelse ved forskydningsoptagelse alene blive baseret på betonens styrke og plasticitet. Da betonen overalt regnes armeret i 2 retninger, vil såvel styrke som plasticitet dog være større end i det uarmerede tilfælde, og spændingerne vil kunne fordeles bort fra det lokale sted, hvor der reelt er betonbrud. Alligevel er flydeevnen så begrænset, at det ikke kan tillades, at der i større zoner fås forskydningsspændinger lig med  $\sigma_c/2$  (maksimal forskydningsspænding), samtidig med at armeringen ikke flyder.

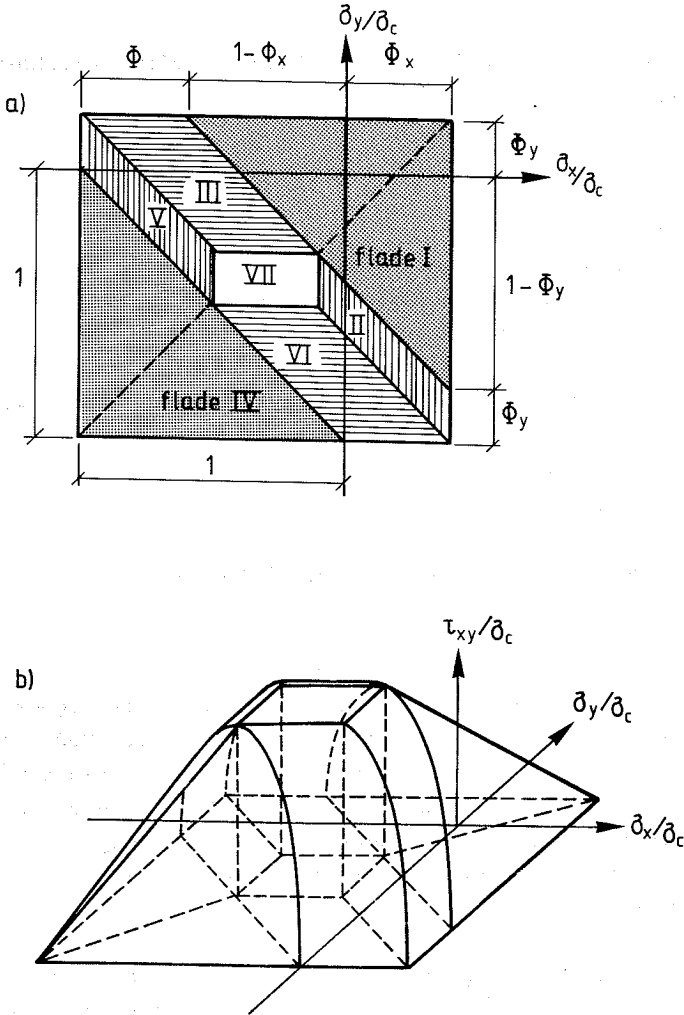


Fig. 2.5. Jernbetonskivers flydebetingelse

Hidtil er ikke taget hensyn til specielle forhold ved forankring af armering. Det er imidlertid klart, at hvor armeringsstængerne er forankrede i det indre eller udmunder ved en fri rand, kan disse ikke regnes påvirket til flydegrænsen. Af

[N,MP, 1969] fremgår, at forankringslængden vinkelret på den frie rand kan begrænses til

$$l = \frac{1}{2} d \frac{\sigma_F}{\sigma_c}, \quad (2.3)$$

hvor

$d$  = armeringsdimension

$\sigma_F$  = armeringsflydespænding

$\sigma_c$  = beton-trykstyrken.

Dette bevirker ret store betontrykspændinger, som bør begrænses til:

$$\sigma_{\max} = \sigma_c \frac{d}{t}, \quad (2.4)$$

ligesom jernafstanden  $a_j$  bør overholde kravet

$$a_j \geq d \frac{\sigma_F}{\sigma_c} \approx 10d. \quad (2.5)$$

M.h.t. armeringens retningsorientering er der regnet med ortogonal armering efter faste x- og y-retninger. Ved ren forskydningspåvirkning i disse retninger fås imidlertid et større armeringsbehov, end hvis der armeres efter træk-hovedspændingsretningen. Dette kan i ugunstige tilfælde betyde, at den metode, der omtales i afsnit 3.4, giver større armeringsbehov end strengt nødvendigt.

Ovenstående forhold påvirker naturligvis også stivhedsforholdene i skiven. Normalt vil forskellen i stivhed kunne blive af størrelsesordenen 50%, men da stivheden i forvejen er flere gange mindre end den elastiske stivhed, vil det normalt være uden praktisk betydning.

M.h.t. minimumsarmeringsgraden anbefales i sidstnævnte reference mindst 5% ved alle farlige, men ikke direkte armeringskrævende steder.

I relation til den angivne flydebetingelse skal sluttelig anføres udtrykkene for bestemmelse af mindstearmering til optagelse af et sæt givne spændingsstørrelser, idet det antages, at

$$\sigma_x \leq \sigma_y:$$

Tilfælde 1:  $\sigma_x \geq -|\tau_{xy}|$

$$\frac{F_{jx} \sigma_F}{t} = \sigma_x + |\tau_{xy}| \quad (= \phi_x \sigma_c) \quad (2.6)$$

$$\frac{F_{jy} \sigma_F}{t} = \sigma_y + |\tau_{xy}| \quad (= \phi_y \sigma_c)$$

$$\sigma_b = -2|\tau_{xy}| \quad (\text{betonspænding})$$

Tilfælde 2:  $\sigma_x < -|\tau_{xy}|$

armeringskrav, hvis  $\sigma_y < 0$

er  $\sigma_x \sigma_y \leq \tau_{xy}^2$ , der bevirker

(2.7)

$$F_{jx} = 0 \quad (= \phi_x \sigma_c)$$

$$\frac{F_{jy} \sigma_F}{t} = \sigma_y + \frac{\tau_{xy}^2}{|\sigma_x|} \quad (= \phi_y \sigma_c)$$

$$\sigma_b = \sigma_x (1 + (\tau_{xy}/\sigma_x)^2) \quad (\text{betonspænding})$$

### 2.2.3 Flydebetingelser og deformationsforhold for plader og skaller

I det foregående er flydebetingelsen for plane spændingstilstande angivet, dvs. flydebetingelsen for skiver. Ved opdeling af en plade i skivelag er det muligt at udlede pladers analytiske flydebetingelse - se [N,MP, 1969]. De samme analytiske udtryk er dog blevet udviklet før kendskabet til skiveflydebetingelserne, nemlig i begyndelsen af 1960'erne. Uafhængigt er de blevet udviklet af henholdsvis Massonet & Sawe [M & S, 1963], Wolfensberger [WOL, 1964] samt af Nielsen [N,MP, 1964]. Flydebetin-  
gelserne kan skrives som

$$-(M_{Fx} - M_x)(M_{Fy} - M_y) + M_{xy}^2 = 0 \quad (2.8)$$

$$-(M'_{Fx} + M_x)(M'_{Fy} + M_y) + M_{xy}^2 = 0, \quad (2.9)$$

hvor  $M_{Fx}$ ,  $M'_{Fx}$ ,  $M_{Fy}$  og  $M'_{Fy}$  angiver flydemomenterne for de pågældende snit, idet ' angiver negativt flydemoment.  $M_x$ ,  $M_y$  og  $M_{xy}$  er snitkraftstørrelserne, dvs. to bøjende momenter og et vridende. Formlerne er udviklet ved negligerig af forskydningskræfter på tværs af pladen.

Ved plader gælder som ved jernbetonbjælker, at trykzonehøjden  $y$  - se fig. 2.6 - på grund af betonens begrænsede deformations-

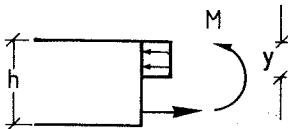


Fig. 2.6. Pladetværsnit

evne højst må antage en vis værdi, der kan bestemmes ud fra deformationsbetragtninger og ud fra, at plane snit forbliver plane. Når der tages hensyn hertil, bestemmes normalt en bæreevneværdi, der er på den sikre side på grund af de forhold, der er omtalt i afsnit 1.2.1.

Medens der for skivers og pladers vedkommende eksisterer færdige analytiske udtryk for jernbetonflydebetingelserne, gælder dette ikke for egentlige skaller. Man må derfor i stedet benytte numeriske beregninger, der på implicit vis bestemmer flydebetingelserne. Berg [BER, 1975] har angivet løsninger, der tager hensyn til såvel armeringens som betonens konstitutive udtryk. På idealplastisk grundlag er metoder bl.a. angivet af Morley m.fl. [MOR, 1970], [R & M, 1974] og [M & G, 1977], og Hansen & Bryder & Nielsen [H m.fl., 1978]. For alle metoder gælder dog det fælles, at der benyttes opdeling af skallen i skivelag - se fig. 2.7, samt at bidrag fra forskydningskræfter på tværs negligeres. Herved kan jernbetonskivers flydebetingelse anvendes på de enkel-

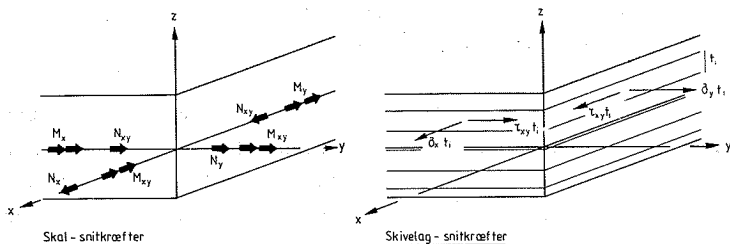


Fig. 2.7. Opdeling af skalsnitkræfter i skivespændinger

te skivelag. I sidstnævnte reference lægges herudover visse bånd på den maksimale trykzonetykkelse af hensyn til betonens begrænsede deformationskapacitet.

Den statiske ligevægt sikres ud fra følgende 6 ligevægtsligninger

$$\begin{aligned}
 N_x &= \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} \sigma_{xi} t_i & M_x &= \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} \sigma_{xi} t_i z_i \\
 N_{xy} &= \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} \tau_{xyi} t_i & M_{xy} &= \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} \tau_{xyi} t_i z_i \\
 N_y &= \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} \sigma_{yi} t_i & M_y &= \sum_{i=1}^{n\text{-lag}} \sigma_{yi} t_i z_i
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

### 3. OPTIMERING AF BÆREEVNE/ARMERINGSBEHOV FOR JERNBETONSKIVER OG -SKALLER

Med anvendelse af de i kapitel I udledte metoder kan nedreværdiløsninger for jernbetonskiver bestemmes. Såvel bæreevne som armeringsbehov beregnes. Lignende metoder er tidligere blevet udviklet for jernbetonplader. Principielt kan metoderne også benyttes på jernbetonskaller.

#### 3.1 Anvendelse af de udviklede numeriske optimeringmetoder ved jernbetonskiver og -skaller

##### 3.1.1 Skiver

Armerede betonskiver besidder som angivet i foregående afsnit visse plastiske egenskaber, således at det normalt er muligt at basere en armerings-/bæreevnebestemmelse på ideal-plastiske beregninger. Som nævnt tidligere er det vigtigt, at man ikke nøjes med kun at indlægge den optimale armering, men at man samtidig indlægger en jævnt fordelt minimumsarmering overalt i skiven. Dette bevirker, at et lokalt brud i betonen ikke giver totalt brud, men fører spændingerne ud til bæredygtige dele. Betragtes en skive som den på fig. 3.1 viste (hovedarmeringen ligger i undersiden), gælder dog, at man på grund af betonens begrænsede deformationskapacitet får en virkelig "maximal" spændingsfordeling, som vist på fig. 3.1b, og ikke en spændingsfordeling som angivet på fig. 3.1a. Den virkelige fordeling kan tilnærmes som angivet på fig. 3.1c-d. Normalt vil det være tilstrækkeligt at benytte den virkelige betonstyrke  $\sigma_c$  og efterkontrollere, at der ikke sker en direkte overgang fra store træk- til store trykspændinger. Det kan dog blive nødvendigt at reducere styrken til  $\sigma_{c\mu}$ , hvor  $\mu$  fastlægges, så den maksimalt resulterer i samme momentoptagelse som på fig. 3.1b. Dette bevirker imidlertid den ulempe, at modellen optager en mindre ren trykkraft end den virkelige skive.

De benyttede beregningsmetoder, der udledes ud fra DILI- og ELLI-metoden angivet i kapitel I, optimerer enten armeringsmængden



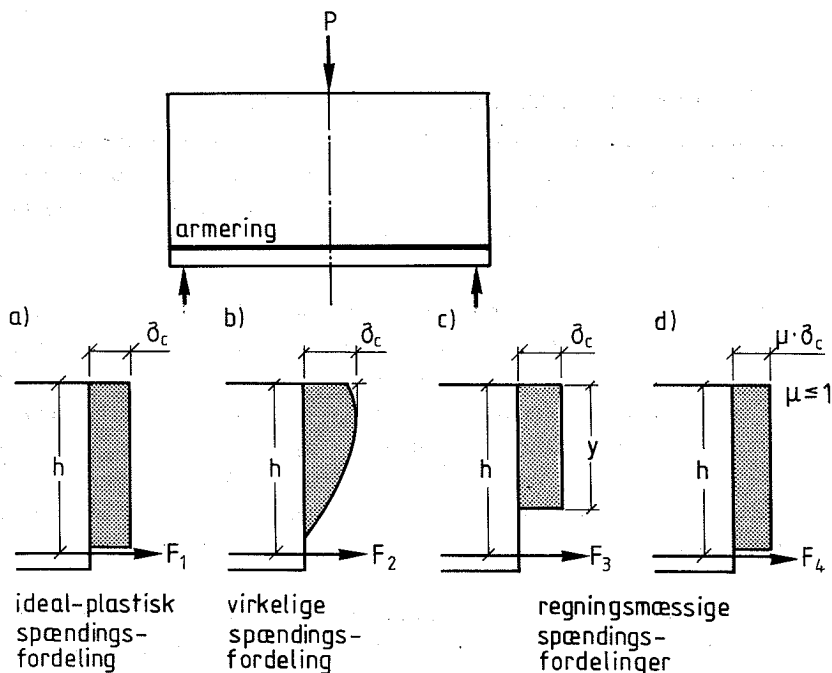


Fig. 3.1. Spændingsfordeling i skive ved max. moment

for givne, ortogonale retninger og given belastning, eller bæreevnen (en eller flere parametre), når armeringen er givet. Betonstyrken regnes i begge tilfælde givet. Flydebetingelserne sikres overholdt overalt i skiven, og de tilhørende armeringsparametre angives således, at armeringen kan indlægges mest formålstjenligt. Hensyntagen til forankringsproblemer kan ske ved indlæggelse af specielle restriktioner på armeringsparametrene, eller evt. ved at lade armeringsparameteren multiplicere med en aftagende faktor hen mod armeringsafslutningen. Endelig kan der delvis tages økonomiske hensyn til forskellige armeringsarrangementer ved at multiplicere parametrene med passende faktorer. Er det således billigere at indlægge armering i y-retningen end i x-retningen, kan man multiplicere x-retningens parameter med en faktor større end 1. Som armeringsparametre benyttes  $\Phi_x$  og  $\Phi_y$ , eller de afledte størrelser  $\Phi_x \sigma_c$  og  $\Phi_y \sigma_c$ , dvs. 2 parametre pr. delområde. Herved fås et armeringsbehov på

$$\sum_{i=1}^n (\Phi_{x_i} \sigma_c + \Phi_{y_i} \sigma_c) t_i A_i$$

hvor  $\sigma_c$ ,  $t_i$  og  $A_i$  er givne, og i refererer til element eller område.

### 3.1.2 Lineariserede skiveflydebetingelser

Af hensyn til den numeriske behandling er det nødvendigt, at flydebetingelserne er givet på en passende form. Da der her benyttes lineær programmering i optimeringsfasen, må flydebetingelserne afgrænses på lineær form.

Der kan benyttes 2 forskellige metoder til linearisering af jernbetonskivers flydebetingelse. Den ene er baseret på direkte linearisering af flydebetingelsen fra fig. 2.5. Den anden anvender derimod en opspaltning af spændingerne i dels tryk- og forskydningsspændinger og dels trækspændinger. De førstnævnte skal overholde betons brud-(flyde)betingelse, medens de sidstnævnte angiver armeringsbehov. Sidstnævnte fremgangsmåde bestemmer jernbetonskivens flydebetingelse indirekte.

I begge de ovennævnte tilfælde er den mest nærliggende fremgangsmåde at linearisere henholdsvis jernbetonskivens flydebetingelse og betonskivens brud-(flyde)betingelse. For betonskiven kan imidlertid også benyttes en metode, der angiver alle tilladelige spændingstilstande som en linearkombination af nogle givne, tilladelige spændingstilstande. Dette gælder, når man har en fast flydebetingelse, der bestemmer en lineær, konveks flade. De givne spændingstilstande skal da være hjørnepunkterne for flydebetingelsen. Dette princip er formuleret hos Zavelani [ZAV, 1974] og er i [H mfl., 1978] benyttet på jernbetonskiver.

Her vil vi benytte direkte linearisering af flydebetingelsen for jernbetonskiver. Dette skyldes, at edb-beregningstiden for et LP-problem som nævnt i kapitel I er omtrent proportional med  $mn^2$ , hvor  $m$  er antal restriktioner og  $n$  er antal variable.  $m$  og  $n$  er ombyttet, idet primal-dual egenskaben udnyttes. Ved den direkte linearisering fås nemlig som oftest langt flere restriktioner end variable, medens de andre metoder virker udjævende på antallet af restriktioner og antallet af variable. Selv om  $m + n$  bliver mindre fås således alligevel, at LP-beregningstiden bliver større. I det specielle tilfælde, hvor armeringen

varierer i alle punkter, er den indirekte metode dog fordelagtigere at anvende.

### Linearisering af jernbetonskivers flydebetingelse:

Af fig. 2.5 fremgår, at lineariseringsproblemet kan deles op i linearisering af fladerne I + VII, når  $\tau_{xy} \geq 0$ . Fladerne I og IV er kegleflader af formen

$$\pm(\sigma_{x0} - \sigma_x)(\sigma_{y0} - \sigma_y) + \tau_{xy}^2 = 0 \quad (3.1)$$

hvor o markerer faste størrelser, Fladerne II - III og V - VI er flader, der er afledt heraf. De bestemmes ved hjælp af rette frembringere parallelle med  $\sigma_x$ - eller  $\sigma_y$ -aksen, der forskydes langs skæringskurven for flade I (og IV) med en plan bestemt ved  $\sigma_y = -\sigma_x + \sigma_{x1}$  og  $\tau_{xy}$ .

Skæres keglefladen (3.1) med en plan bestemt ved  $\sigma_y = -\sigma_x$  fås kurven:

$$-(\sigma_{x0} - \sigma_x)(\sigma_{y0} + \sigma_x) + \tau_{xy}^2 = 0 \quad \text{eller} \quad (3.2)$$

$$(\sigma_x - \frac{1}{2} [\sigma_{x0} - \sigma_{y0}])^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_{x0} + \sigma_{y0})^2,$$

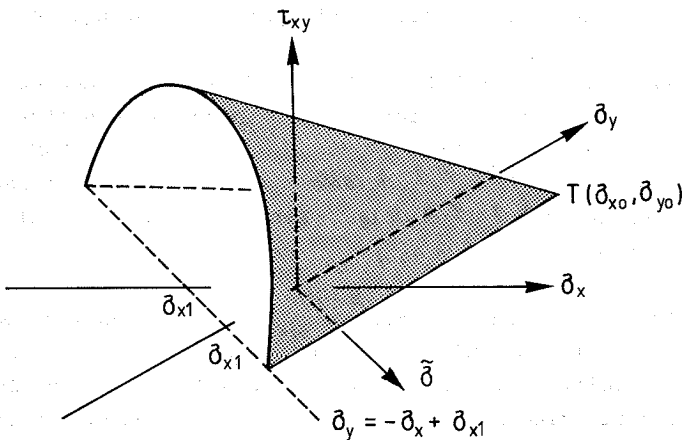


Fig. 3.2. Kegleflade  $-(\sigma_{x0} - \sigma_x)(\sigma_{y0} - \sigma_y) + \tau_{xy}^2 = 0$

der udtrykt ved  $\sigma_x$  og  $\tau_{xy}$  bestemmer en cirkel - se fig. 3.3. Den geometriske skæringskurve kan bestemmes som

$$(\tilde{\sigma}/\sqrt{2} - \frac{1}{2} [\sigma_{x0} - \sigma_{y0}])^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{1}{4} (\sigma_{x0} + \sigma_{y0})^2, \quad (3.3)$$

$$(\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma_x),$$

der bestemmer en ellipse.

Endelig giver skæring med  $\sigma_y = \text{konstant}$  en parabel.

Af ovenstående fremgår, at linearisering af fladerne I - VI kan anskueliggøres ved betragtning af forholdene på en cirkel eller blot ved forholdene på en kvart cirkel. Flade VII er fra starten en lineær flade.

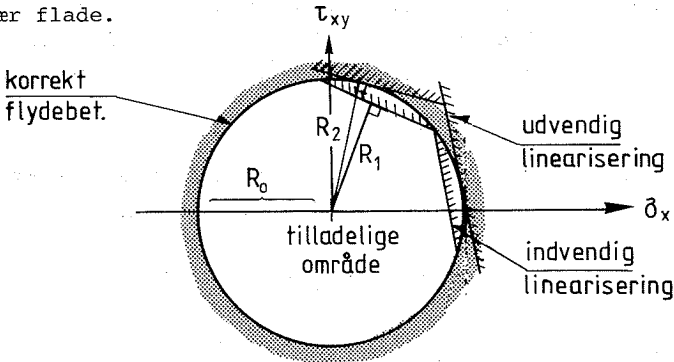
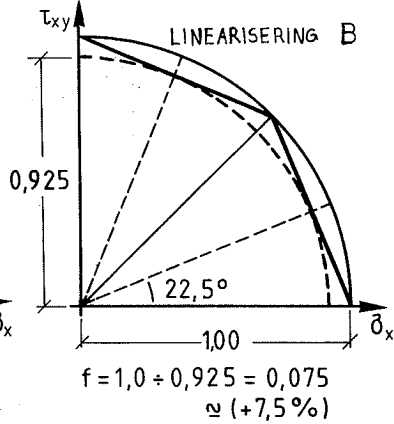
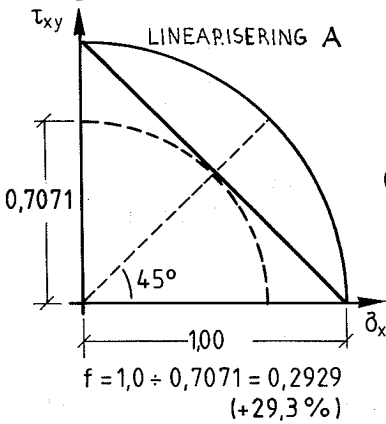


Fig. 3.3. Linearisering af flydebetingelsen

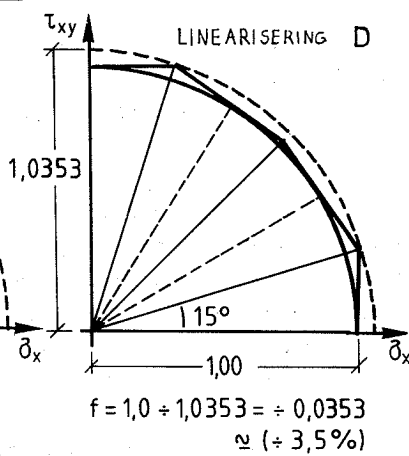
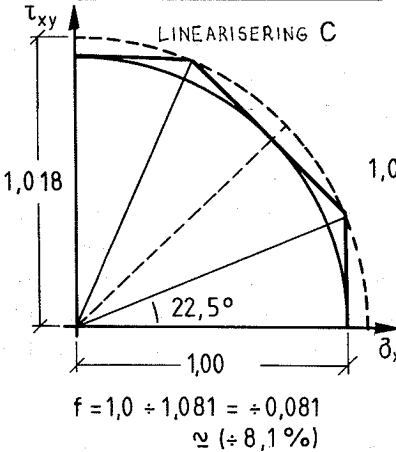
Ved lineariseringen begås altid en fejl, når fladerne er ikke-lineære. Foretages lineariseringen inden for den afgrænsende flydeflade - illustreret på fig. 3.3 - fås en lineariseret flydebetingelse på den sikre side. Omvendt fås, ved linearisering uden for den afgrænsende flydeflade, en flydebetingelse på den usikre side.

På fig. 3.4 er nogle lineariseringer angivet ud fra opdeling af kvartcirklen.  $f$  angiver her forholdet  $(R_0 - R_1)/R_0$ , der udtrykker den relative lineariseringsfejl. Medens  $f$  er ret moderat ved de lineariseringer, der er vist på fig. 3.4, gælder dette ikke for fejlen  $g$  på  $\tau_{xy}$  i relation til  $R_0$ . Ved LINEARISERING A fås såle-

indvendige lineariseringer



udvendige lineariseringer



Blandede lineariseringer

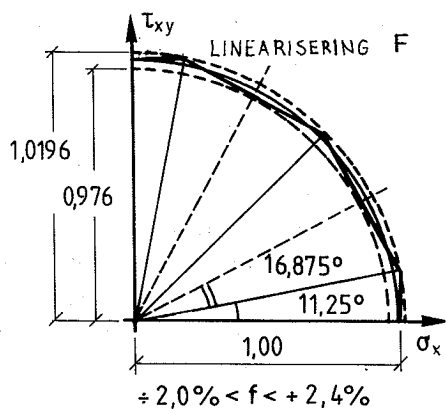
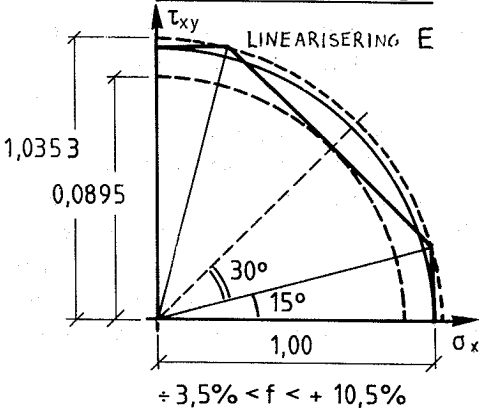


Fig. 3.4. a-g linearisering af keglefladen (3.1)

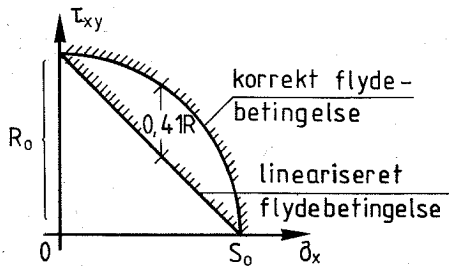


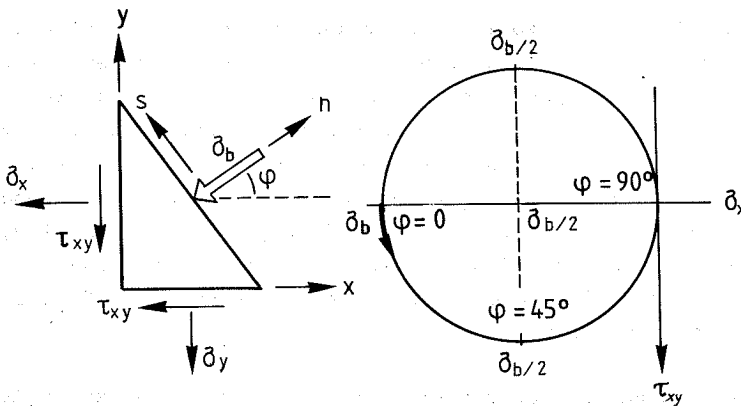
Fig. 3.5. Fejl ved linearisering

des en fejl på ca. 40% - se fig. 3.5 -, og i forhold til den aktuelle  $\tau_{xy}$  værdi kan fejlen blive næsten 100% (ved punkt  $S_0$ ).

De nævnte forhold betyder, at fejlen på armeringen i begge retninger højst vil blive  $f\sigma_c/2$ , idet  $R_0^{\max} = \tau_{\max} = 1/2\sigma_c$ . Tilsvarende vil fejlen på trykstyrken ved flade IV højst blive  $f\sigma_c/2$ .

I tilfældet  $\Phi_x\sigma_c, \Phi_y\sigma_c = 0$  angiver flade I den ene afgrænsningsflade for betons brudbetingelse og flade IV den anden. I dette tilfælde vil det være nærliggende at kræve, at et enakset tryk aldrig fører til et armeringsbehov. Af fig. 3.6 fremgår da, at kun udvendige lineariseringer kan benyttes, da det énaksede tryk bevirker, at spændingerne ligger på grænsefladen ved drejning af koordinatsystemet.

Når disse lineariseringer benyttes, skal der imidlertid ved forskydningsspændinger forskellige fra nul kunne optages lidt større armeringskræfter end beregnet. Størrelsen af trækspændingerne bliver dog maksimalt  $f\sigma_c/2$ , hvilket er vist i skema 3.1 for de benyttede lineariseringer. Der bør derfor udregnes "ekstra armering" ved optagelse af forskydningsspændinger, når der benyttes udvendig linearisering. Den "ekstra armering" bliver maksimalt som angivet i skema 3.1. "Ekstra armeringen" adderes til den bestemte armering, og beregnes ens i begge retninger, hvilket svarer til forskydning af keglefladens toppunkt max. med stykket  $f\sigma_c/2$  i begge retninger. Ønskes ekstra bidraget kun udregnet for én retning, vil man kunne få større værdier end angivet i skema 3.1.



$$\sigma_x = -\sigma_b \cos^2 \varphi$$

$$\sigma_y = -\sigma_b \sin^2 \varphi$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2} \sigma_b \sin 2\varphi$$

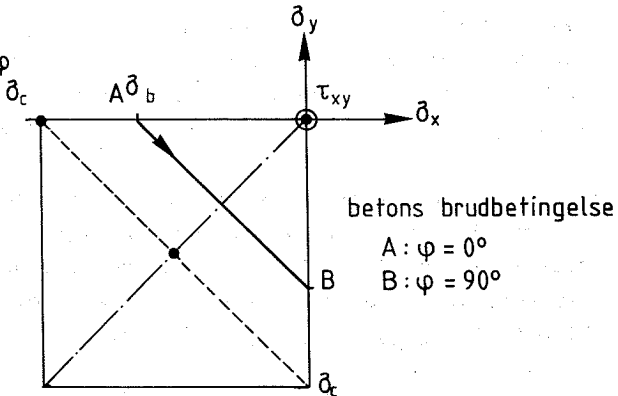


Fig. 3.6. En-akset betontryk

Linearisering	Ekstra trækspændinger i procent af $\sigma_c$
LINEARISERING A	0 (kræver for megen armering)
LINEARISERING B	0 ( " " " " )
LINEARISERING C	4,05%
LINEARISERING E	1,75%
LINEARISERING F	1,00%

Skema 3.1. Ekstra trækspændinger fra forskydningsspændinger





Overgangsfladerne II-III og IV-VI kan i henhold til det foregående lineariseres på en lignende måde som anvendt ved flade I og II.

I skema 3.2 er de anvendte lineariseringer angivet. De benævnes LIN = 1,2,4, og er sammenstykket af lineariseringerne for en kvartcirkel (LINEARISERING A-D), der er omtalt i det foregående - se fig. 3.4.

		flade I	flade II	flade III	flade IV	flade V	flade VI	flade VII	
LIN = 1	LINEARISERING	A	A	A	A	A	A	lin.	$f_a < 29,0\%$ $f_b < 29,0\%$
	antal restrikt.	4	(2)	(2)	4	(2)	(2)	2	$\Sigma = 10$
LIN = 2	LINEARISERING	B	B	B	B	B	B	lin.	$f_a < 7,5\%$ $f_b < 7,5\%$
	Antal restrikt.	8	2+(2)	2+(2)	8	2+(2)	2+(2)	2	$\Sigma = 26$
LIN = 4	LINEARISERING	D	E	E	A	A	A	lin.	$-3,5\% \leq f_a \leq +10,5\%$ $f_b < 29,0\%$
	Antal restrikt.	12	2+(2)	2+(2)	4	(2)	(2)	2	$\Sigma = 22$

$f_a, f_b$  angiver relative fejl på henholdsvis armerings-restriktioner (flade I-III) og betonrestriktioner (flade IV-VI).

Alle restriktioner er angivet, dvs. for begge symmetridele.

( ) angiver restriktioner, der er opstillet ved I eller IV.

Skema 3.1. Anvendte lineariseringer (LIN = 1,2,4)

Om de enkelte lineariseringer, der findes udskrevet i appendix 1, kan siges følgende:

LIN = 1 Ved denne benyttes indvendig linearisering, og der benyttes kun én restriktion pr. kvartcirkel. Fladerne II-III og V-VI bliver herved givet ved lineariseringerne for henholdsvis flade I og IV, således at det samlede antal restriktioner kun bliver 10.

LIN = 2 Også her benyttes indvendig linearisering, og der benyttes ens linearisering for fladerne I-VI. Der benyttes 2 lineariseringer pr. kvartcirkel, hvorved det samlede antal restriktioner bliver 26.

LIN = 4 Denne benytter en ydre, men ret fin linearisering ved armeringsrestriktionerne i flade I (3 lineariseringer pr. kvartcirkel). Der fås altså en ret god bestemmelse af armeringen (indenfor 3,5%), og man får, at et én-akset betontryk kan optages i alle retninger uden brug af armering. Ved fladerne II-III benyttes en blandet linearisering med 2 inddelinger pr. kvartcirkel. Herved afskæres lidt af flade I, således at for det én-aksede betontryk større end  $0,895\sigma_c$  fås et lille armeringsbehov. For de rene betonrestriktioner IV-VI er benyttet den grove linearisering fra LIN = 1; dette er gjort dels for at begrænse antallet af restriktioner, og dels fordi betonstyrken ofte er rigelig stor. Ved beregningerne efterregnes den tidligere omtalte "ekstra armering", og denne medtages i den samlede armering.

Bedre lineariseringer end de her angivne kan naturligvis benyttes, men dette modsvares af dyrere beregninger. Imidlertid må lineariseringsfejlen som nævnt sammenholdes med fejlen på materialekarakteristika, og derfor skulle linearisering LIN = 4 i mange tilfælde være fuld tilstrækkelig. Linearisering LIN = 4 og tildels LIN = 2 er for grove ved armeringsrestriktionerne.

### 3.1.3 Plader og lineariserede pladeflydebetingelser

For jernbetonplader er udviklet flere metoder baseret på nedreværdiprincippet. Som nævnt har således bl.a. Wolfensberger [WOL, 1964], Anderheggen & Knöpfel [A & K, 1972] og H. Pedersen [PED, 1974] angivet sådanne metoder. Der er ved disse fremstillinger blevet anvendt en linearisering af flydefladen, som er angivet af Wolfensberger. Som materialevariable benyttes de tilfældelige flydemomenter. Denne linearisering svarer til  $LIN = 1$  for skiver, og er givet ved:

$$\begin{aligned} M_{Fx} - M_x \pm M_{xy} &\geq 0 \\ M_{Fy} - M_y \pm M_{xy} &\geq 0 \\ M'_{Fx} + M_x \pm M_{xy} &\geq 0 \\ M'_{Fy} + M_y \pm M_{xy} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De korrekte flydebetingelser er beskrevet i (2.8-9).

De løsninger, der bestemmes herved, har i mange tilfælde vist sig gode, idet lineariseringen ikke synes at have bevirket nogen voldsom ændring på armeringsbehov eller bæreevne i forhold til korrekte løsninger og øvregrænseløsninger. Der synes altså at være en tendens til, at snitkræfterne ikke antager de ugunstige kombinationer, der bevirker fejl på de tidligere fundne 29%. Årsagen til dette må utvivlsomt søges i en kombination af nedenstående forhold, hvor jernbetonplader adskiller sig fra jernbetonskiver:

1) Momentfordelingen kan normalt varieres ret meget uden voldsom indflydelse på armeringsbehov eller bæreevne; et forhold der jo også betinger brudlinieteoriens simple, men fordelagtige anvendelse ved pladeberegninger.

2) Flydebetingelsen har fire armeringsparametre, således at den i nogle tilfælde kan forskydes uden merforbrug af armering.

3) Alle belastninger resulterer i et armeringsbehov.

4) Det er ofte fordelagtigt at indlægge armering efter akse-  
retningerne, dvs.  $M_{xy}$  er ofte nul eller lille i forhold til  
 $M_x$  og  $M_y$ .

Hertil kommer endelig, at det sædvanligvis er lettere at tage  
hensyn til enkeltkræfter p.g.a. Kirchhoff-teorien for vridende  
momenter.

#### 3.1.4 Skaller og lineariserede skalflydebetingelser

Ligesom jernbetonskiver og -plader besidder jernbetonskaller  
naturligvis plastiske egenskaber, hvorfor det er nærliggende  
at anvende tilsvarende numeriske optimeringsmetoder, som er  
benyttet for plader og skiver. Imidlertid er skalproblemet langt  
mere omfattende. Dette skyldes, at der forekommer mere end dob-  
belt så mange snitkræfter, skallen er krum, samt at der fås  
langt flere flydebetingelsesudtryk. Med erfaring fra skivetil-  
fældet synes det derfor ikke praktisk muligt på nuværende tids-  
punkt at behandle skalproblemet på denne måde. Den mest farba-  
re vej for generelle jernbetonskaller synes at være bestemmelse  
af en elastisk snitkraftfordeling med efterfølgende armerings-  
bestemmelse. Sådanne armeringsbestemmelser er omtalt i afsnit  
2.2.3, idet der er anvendt opdeling i skivelag. I det følgende  
skal dog kort skitseres visse forhold vedr. jernbetonskaller  
i relation i de numeriske optimeringsmetoder.

Først skal nævnes, at af mangel på en specifik jernbetonskal-  
flydebetingelse, må som ovenfor benyttes opdeling i skivelag.  
Imidlertid må skivelagtykkelserne være givet på forhånd, hvis  
der ønskes anvendt lineær programmering. Det simpleste bliver  
at anvende 3 skiver, som vist på fig. 3.8, hvor tykkelsen af  
de to yderste armerede skiver passende kan vælges som 2 gange  
dæklagstykkelsen, så armeringen ligger midt i disse skiver.  
Midterskiven regnes uarmeret. Skalsnitkræfterne kan enten på  
forhånd være delt ud på de to yderste skiver (ved små tryk-  
kræfter) eller de kan deles ud på alle skiver under optimeringen,

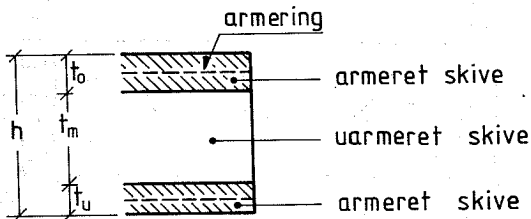


Fig. 3.8. Skivelagsopdeling af skal

idet skivespændingerne indføres som ekstra variable, der knyttes sammen ved ligevægtsligningerne (2.10) for skalsnitkræfterne. Det sidstnævnte er at foretrække, men naturligvis tilsvarende dyrere at anvende p.g.a. de ekstra variable og ligninger. Uanset opdelingen fremkommer dog en ekstra fejl p.g.a. skiveopdelingen, samtidig med at der i forvejen forekommer en lineariseringsfejl på skiveflydebetingelserne. Ovenstående har forudsat lineær programmering anvendt. Ikke-lineær programmering vil kunne benytte variabel skivetykkelse, men bliver endnu dyrere i brug.

Af hensyn til betons begrænsede tøjningskapacitet kan det være nødvendigt at tage ekstra hensyn, evt. ved at mindske betonstyrken.

Et forhold, der imidlertid også spiller ind ved jernbetonskaller, er forskellen i stivhed overfor momentpåvirkninger og skivekraftpåvirkninger. Dette kan bevirke, at man ikke i praksis umiddelbart frit kan flytte på momenter og skivesnitkræfter. F.eks. vil det i nogle tilfælde være fordelagtigst kun at indlægge koncentrerede tværarmeringer  $A_1$ - $A_2$  i et plant tilfælde, som vist på fig. 3.9. Dvs. at der ikke tages hensyn til de krumninger, som den lodrette last giver anledning til.

Det fremgår altså, at der ved jernbetonskaller dels er numeriske kapacitetsproblemer, samt visse deformationsproblemer, der må afklares, før en generel optimeringsmetode kan udvikles.

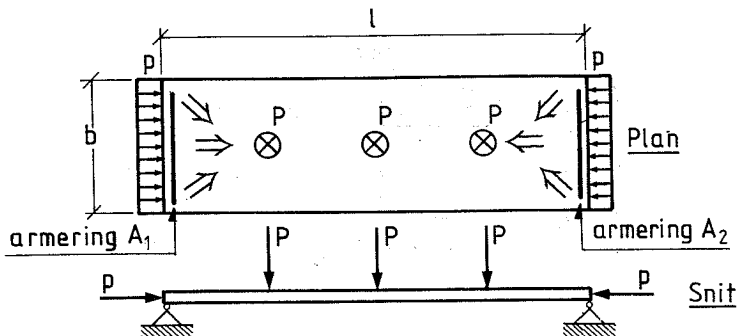


Fig. 3.9. Plant legeme belastet med vandrette og lodrette kræfter ( $l > b$ )

### 3.2 Andre numeriske optimeringsmetoder for jernbetonskiver

Ved de benyttede optimeringsmetoder har ulempen været, at de har været betydelig dyrere end elastiske gennemregninger. Hvor kun en del af konstruktionen har ideal-plastisk opførsel, medens resten opfører sig elastisk - dette gælder f.eks. jernbetonskiver - ville det derfor være naturligt at regne de elastiske dele for elastiske. Ved optimering af armeringsmængden i de ideal-plastiske dele, vil der imidlertid være en tendens til, at armeringsbehovet rykker op i den elastiske del, medmindre flydebetingelserne også er opskrevet her (i modsat fald er armeringen "gratis"). Dette giver derfor ikke besparelse i antal restriktioner, da det kan være vanskeligt at udvælge netop de steder, hvor det ikke er nødvendigt at opstille betingelserne. Der fås dog et mindre antal variable.

Optimering af den totale armeringsmængde ud fra en transformeret elastisk løsning er også en mulighed. Hvis det f.eks. var muligt for en skive iterativt at udtrykke armeringsmængden ved et udtryk analogt til udtrykket for den elastiske energi,

$$W = \frac{1}{2E} [(\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2) + (\sigma_y^2 + \tau_{xy}^2)], \quad v = 0, \quad (3.5)$$

kunne dette tænkes benyttet som udgangspunkt for optimering ved hjælp af elastiske beregninger. Imidlertid lyder armerings-

behovet på:

$$F_{\min} = |\sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{tg} \varphi| + |\sigma_y + \tau_{xy} \cot \varphi|, \quad (3.6)$$

hvor  $\varphi$  er vinklen mellem betontrykretning og x-aksen, således at en transformation ikke synes mulig. Dette skyldes også, at armeringsbehovet i trykzonen sædvanligvis vil være 0, selvom den elastiske energi er forskellig fra 0.

#### 4. JERNBETONSKIVE - EKSEMPLER

Af eksemplerne i det følgende fremgår, at der fås eksakte armeringsbehov, når de ikke-lineariserede flydebetingelser er korrekt tilfredsstillet, dvs. rene træk-, tryk- eller forskydningsspændinger, og spændingerne er kontinuert fordelt over skiven (eks. 1). Når den fordelagtigste løsning kræver diskontinuert fordelte spændinger, fås mindre gode resultater (eks. 2-5). Dette er i overensstemmelse med de i kapitel I anførte betragtninger og skyldes de begrænsninger, der introduceres i spændingsforløbet på grund af elementinddeling eller netinddeling. Af fig. 4.1 fremgår således, at der ved ELLI-eksemplet fås et zig-zag forløb for trykkomponenten i forhold til den simple løsning med en betontrykstang. Ved DILI-metoden er der bedre mulighed for overføring af det skrå tryk, som det fremgår af eksempel 3-5. Også her fås dog et spændingsforløb, der ikke overfører trykket så fordelagtigt som muligt, idet de diskontinuerte spændingsfordelinger delvis udglattes.

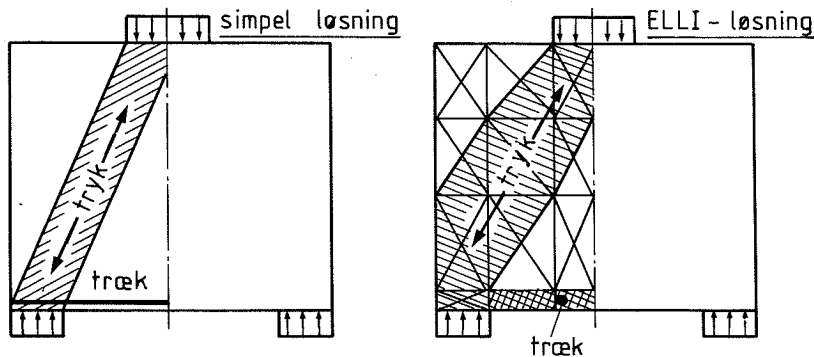


Fig. 4.1. Optimale, statisk tilladelig løsning ved skiveeksempel

DILI-metoden giver altså normalt bedre løsninger end ELLI-metoden, hvortil kommer at den er langt billigere i brug. ELLI-metoden giver selv ved ret simple problemer temmelig dyre løsninger, hvorfor den ikke synes særlig anvendelig, selv når man tager hensyn til, at den giver sikre nedreværdiløsninger.



Med hensyn til de lineariserede flydebetingelser fremgår af eksempel 3, at  $LIN = 4$  som forventet er langt den fordelagtigste, medens  $LIN = 1$  kan konkluderes at være uegnet ved armeringsbestemmelse af skiver, da den i mange tilfælde bevirker altfor store armeringsbehov i sammenligning med de andre lineariseringer.  $LIN = 4$  bør derfor normalt anvendes, da den kan overføre et tryk uden armeringsbehov samtidig med, at lineariseringfejlen er ret ubetydelig.

Anvendelse af DILI-metoden og linearisering  $LIN = 4$  kan derfor konkluderes at være mest fordelagtigt. Med et passende antal parametre fås normalt resultater, der højst giver 5-15% for megen armering sammenholdt med en idealiseret stringerløsning.

Ved benyttelse af denne kombination fremgår det tydeligt, at ved lange "bjælkeskiver" giver en kombination af lodret armering og trækarmring et mindre armeringsbehov end anvendelse af en stringerløsning.

Der er kun betragtet bestemmelse af armering. Bestemmelse af bæreevne kan imidlertid foretages på tilsvarende vis. Ved alle eksempler benyttes dimensionsløse enheder.

#### 4.1 Eksempel 1: Kvadratisk, kontinuert belastet jernbetonskive

På fig. 4.2 er vist en kvadratisk jernbetonskive med tilhørende belastning. Der regnes med forskellige armeringsparametre i henholdsvis x- og y-retningen, og disse gøres variable fra element til element ved ELLI-eksemplerne, og fra punkt til punkt ved DILI-eksemplerne. Den teoretiske minimumsarmering kan let bestemmes ved armeringsformlerne (2.6) og (2.7).

Ved de numeriske beregninger benyttes de på fig. 4.3 viste ELLI- og DILI-eksempler.

Det fremgår af tabel 4.1, at de numeriske metoder fuldstændig kan gengive den eksakte løsning.

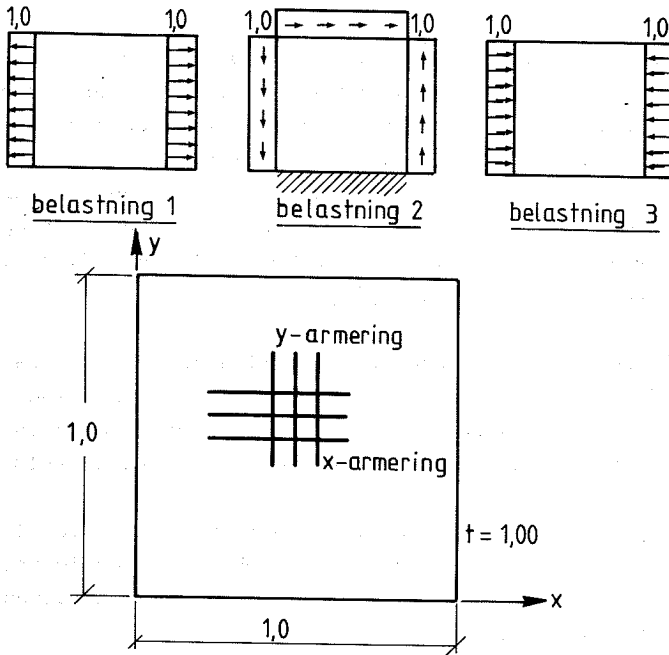
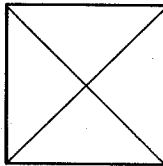


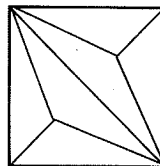
Fig. 4.2. Kvadratisk jernbetonskive med belastninger

4 elementer

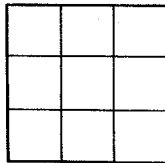


ELLI - 1

6 elementer



ELLI - 2



4 x 4 knuder

DILI - 1

Fig. 4.3. ELLI- og DILI-eksempler

	edb eks	LIN	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\sigma_y$	$F_x$	$F_y$	$F_{tot}$
belastning 1		TEOR.	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	ELLI-1	1/2/4	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	ELLI-2	1/2/4	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0
	DILI-1	1/2/4	1.0	0.0	0.0	1.0	0.0	1.0
belastning 2		TEOR.	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0	2.0
	ELLI-1	1/2/4	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0	2.0
	ELLI-2	1/2/4	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0	2.0
	DILI-1	4	0.0	1.0	0.0	0.7748	1.2252	2.0
belastning 3		TEOR.	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0
	ELLI-1	1/2/4	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0
	ELLI-2	1/2/4	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0
	DILI-1	1/2/4	-1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0

Tabel 4.1. Armeringsbehov ved eksempel 1

#### 4.2 Eksempel 2: Kvadratisk, diskontinuert belastet jernbetonskive

Belastes en kvadratisk jernbetonskive som vist på fig. 4.4, kan fås et indtryk af dels hvorledes en skrå belastning overføres, og dels hvilket armeringsbehov de forskellige lineariseringer bevirker. Der betragtes i henhold til fig. 4.5 kun DILI-beregninger. Idet der benyttes de viste differensinddelinger, fås resultater som anført i tabel 4.2.

Armeringsarrangement A2.1 angiver ialt 2 armeringsparametre, en for x-retningen og en for y-retningen. A2.2 svarer derimod til 2 parametre for hvert "element" eller punkt.  $\sigma_a$  angiver den maksimale, numeriske normalspænding langs randen.

Det fremgår, at en skrå, én-akset trykpåvirkning i forhold til x- og y-retningerne ikke kan overføres uden brug af armering. Årsagen hertil er, at påvirkningen ikke kan overføres ved en konstant trykpåvirkning inden for den markerede, stiplede linie på fig. 4.4. Tilfredsstillelse af de indre ligevægtsligninger kræver, at den diskontinuerte overgang mellem den trykbelastede

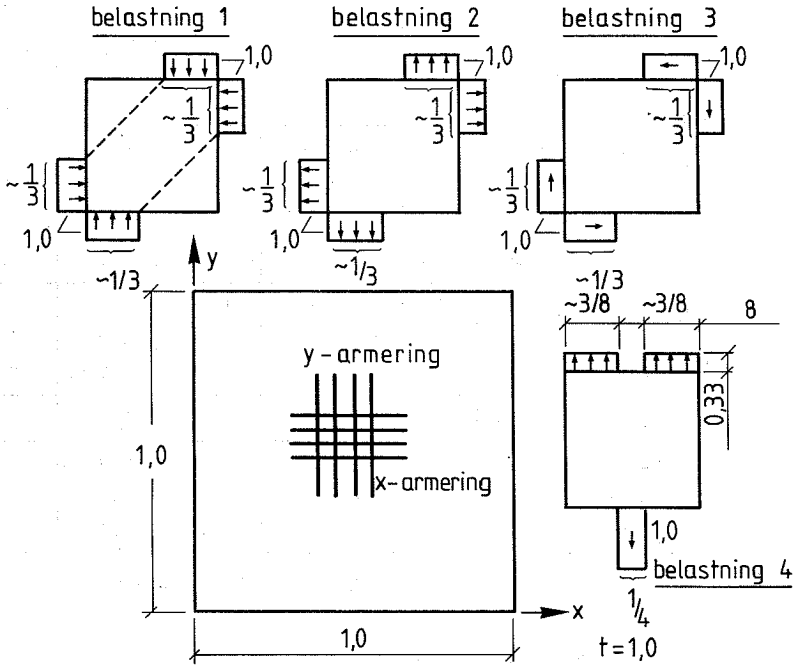


Fig. 4.4. Kvadratisk jernbetonskive med belastninger

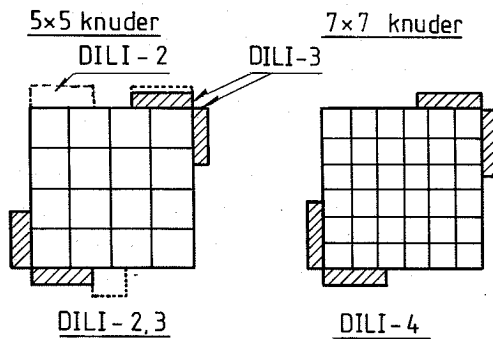


Fig. 4.5. DILI-eksempler

	edb eks.	$\sigma_c/\sigma_a$	LIN	$F_x$	$F_y$	$F_{tot}$	Armerings- arrangement
belastning 1	Teor.			0.0	0.0	0.0	
	DILI-3	1.1	4	0.021	0.021	0.041	A2.1
	DILI-4		4	0.017	0.017	0.035	"
	DILI-3	1.25	4	0.013	0.013	0.025	A2.1
	DILI-4		4	0.014	0.014	0.028	"
	DILI-3	1.5	4	0.0081	0.0081	0.016	A2.1
	DILI-4		4	0.0120	0.0120	0.024	
belastning 2	Teor.			1.0	1.0	2.0	
	DILI-3	1.1	4	1.0	1.0	2.0	A2.1
	DILI-3	1.25	4	1.0	1.0	2.0	A2.1
	DILI-3	1.5	4	1.0	1.0	2.0	A2.1
bel. 3	Teor.			1.0	1.0	2.0	
	DILI-3	1.25	4	0.9037	1.0963	2.0	A2.1
belastning 4	Teor.					%	
	DILI-2		1,2,4	0.0835	1.0	1.0835	A2.1
	DILI-2		1			0.3229	A2.2
	DILI-2	1.25	2			0.3229	"
	DILI-2		4			0.329	"

Tabel 4.2. Armeringsbehov ved eksempel 2.

og den ubelastede del udjævnes. Herved kan trykzonen få lidt af en zig-zag retning, som antydnet på fig. 4.1.

Størrelsen af armeringsbehovet ved belastning 1 er dog begrænset. Idet den nødvendige skivetykkelse bliver  $\sigma_a/\sigma_c$ , giver en minimums-armering på 5% af tværsnittet følgende behov:

$$\sigma_c/\sigma_a = 1.1 \Rightarrow 0.05/1.1 = 0.045$$

$$\sigma_c/\sigma_a = 1.25 \Rightarrow 0.05/1.25 = 0.040$$

$$\sigma_c/\sigma_a = 1.5 \Rightarrow 0.05/1.5 = 0.033,$$

der alle er større end de beregnede i tabel 4.2.

#### 4.3 Rektangulære jernbetonskiver, der virker som høje bjælker

De eksempler, der vil blive beregnet i det følgende, er alle af samme type som det på fig. 4.6a viste, dvs. en slags høje bjælker. Årsagen til valg af disse eksempler er, at de ofte forekommer i praksis samt, at de giver anledning til et stærkt diskontinuert snitkraftforløb, når skiverne belastes over en kort strækning. Dette er anskueliggjort på fig. 4.6b, hvor armeringen er indlagt som en trækstringer i undersiden. Denne stringerarmering kan idealiseret fastlægges ud fra det maximale moment, og vil i det følgende blive benyttet som referencearmering.

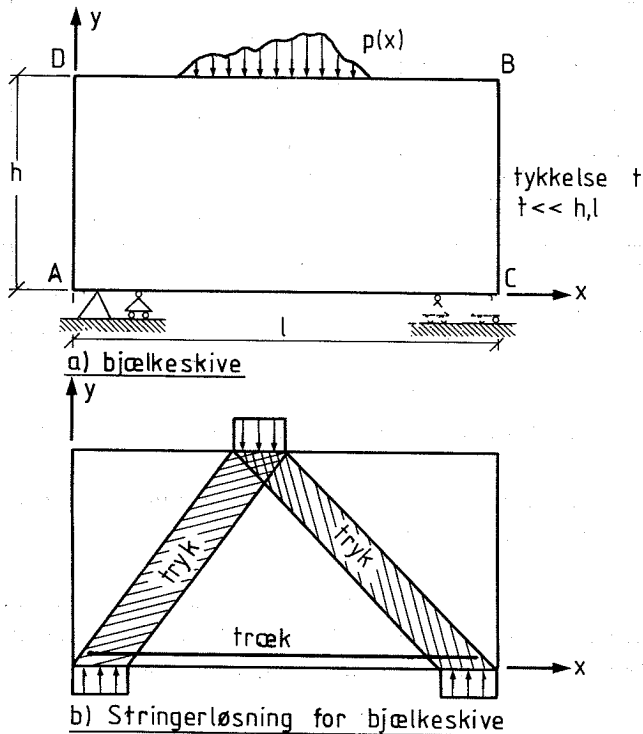


Fig. 4.6. Bjælkeskiver.

Randbetingelserne kan indføres, som de forekommer på skiven, dvs. frie rande bortset fra ved understøtningerne. Det må sikres, at der ikke indføres ikke-tilladelige reaktioner, dvs. reaktioner, der ikke er i overensstemmelse med deformationerne. Der kan også regnes med frie rande hele vejen rundt når påførte belastninger og reaktioner er i ligevægt. Den sidste fremgangsmåde vil blive benyttet i det følgende, idet dog kun halvdelen af skiven betragtes, da såvel skive som belastning regnes symmetriske. I symmetrilinien haves randbetingelsen  $n \neq 0$ ,  $n_s = 0$ .

#### 4.4 Eksempel 3: Kort jernbeton-bjælkeskive ( $\sigma_c = \infty$ )

En jernbetonskive som den på fig. 4.7 viste beregnes ved såvel ELLI- som DILI-metoden, idet hovedarmeringen regnes indlagt i undersiden. Der tages ikke hensyn til betonspændingerne, idet

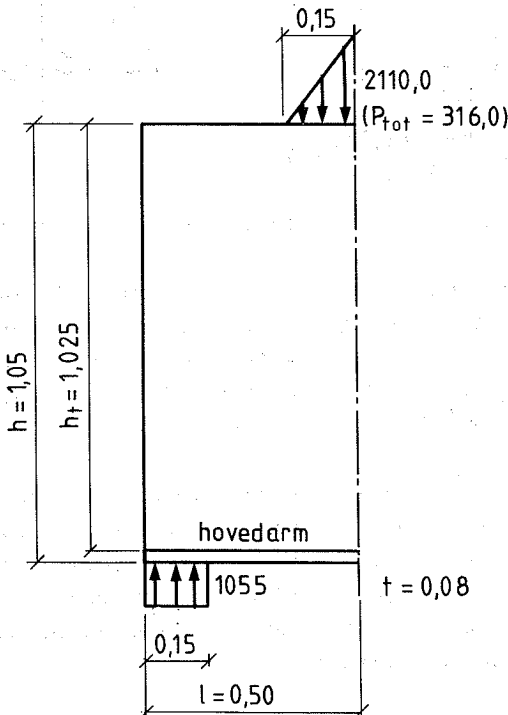


Fig. 4.7. Kort bjælkeskive

betonstyrken regnes uendelig stor (de tilhørende restriktioner opstilles ikke). Herved kan manuelt udregnes følgende armeringskraft:  $K = 57.7$ , når midtersnittets moment antages afgørende for armeringsbehovet. Regnes der samtidig med konstant hovedarmering på langs af hele skiven, kan armeringsbehovet pr. symmetrihalvdel udregnes til:  $F_{\text{total, teor}} = K \cdot l = 57.7 \cdot 0.5 = 28.8$ .

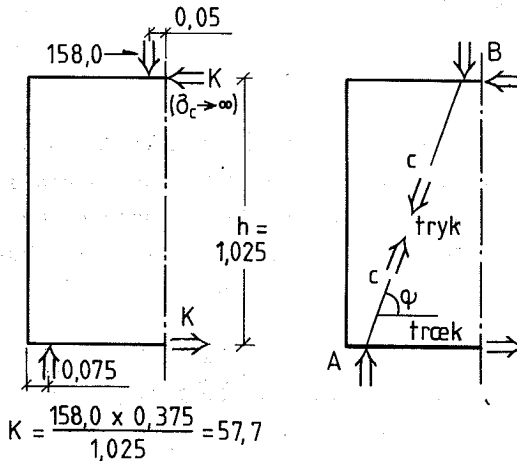
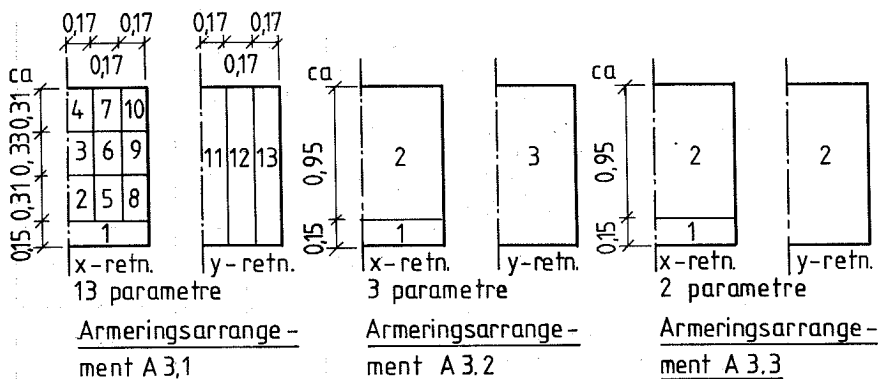


Fig. 4.8. Armeringskraft og træk/trykstringer

Dette svarer til en stringerløsning som vist på fig. 4.6. Da skiven er ret kort, kan ikke forventes mindre armeringsbehov ved indlæggelse af lodret armering. Det beregnede armeringsbehov  $F$  må derfor være det teoretisk mindst mulige, når armeringen er gennemgående og ligger i undersiden.

Ved anvendelse af numeriske metoder melder sig flere problemer. For det første kan belastningen normalt ikke overføres fuldstændig korrekt med mindre, der benyttes uendelig mange inddelinger. For det andet må de indre kræfter fordeles over et vist areal, der bevirker, at stringeren spredes ud og kommer til at forløbe i zig-zag som vist på fig. 4.1.





To armeringsparametre pr.  
element eller punkt.  
Armeringsarrangement A 3.4

Fig. 4.9. Armeringsarrangementer

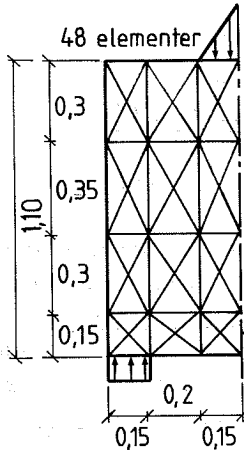
Der kan derfor ikke regnes med uendelig store spændinger, som antydnet i fig. 4.8. Endelig kan de lokale ligevægtsligninger bevirke, at der må ske betydelige spændingsomlejring, hvor træk og/eller trykstringere mødes. Dette er tilfældet ved punkt A og B på fig. 4.8. De numeriske beregninger må derfor forventes at give større armeringsbehov end  $F_{\text{total, teor}}$ .

De benyttede armeringsarrangementer er angivet på fig. 4.9. Ved arrangement A 3.1-3 regnes med gennemgående undersidearmring, medens det sidste armeringsarrangement benytter 2 parametre i hvert eneste element.

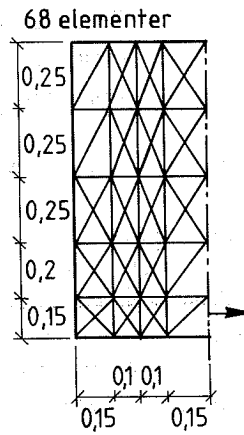
ELLI og DILI-eksemplerne er optegnet på fig. 4.10a, medens fig. 4.10b viser elementinddelingen ved en elastisk spændingsbestemmelse.

Resultaterne i tabel 4.3a viser for det første, at  $LIN = 1$  er en helt uegnet linearisering. Dette fremgår af såvel ELLI- som DILI-eksemplerne, idet der i begge tilfælde sker en voldsom formindskelse af armeringsbehovet fra  $LIN = 1$  til  $LIN = 2$ . Dernæst ses, at DILI-eksemplerne giver mindre armeringsbehov end ELLI-eksemplerne, når der henholdsvis benyttes armeringsarran-

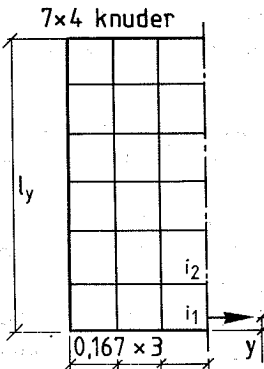
Hovedarmering	DILI-5		DILI-6		DILI-7	
	$l_y$	y	$l_y$	y	$l_y$	y
A Hovedarmering i tyngdepunktet mellem linie $i_1$ og $i_2$	1.152	0.127	1.118	0.093	1.087	0.060
B Hovedarmering placeres i linie $i_2$	1.230	0.205	1.171	0.146	1.118	0.093
C Hovedarmering placeres i linie $i_1$	1.025	0	1.025	0	1.025	0



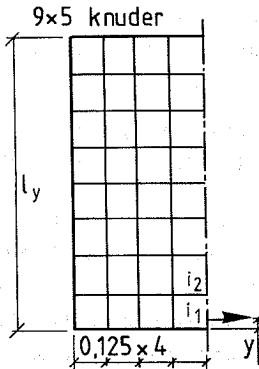
ELLI-3



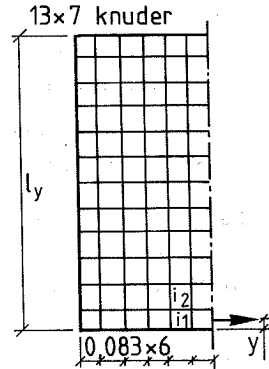
ELLI-4



DILI 5A,B,C



DILI-6 A,B,C



DILI-7 A,B,C

Fig. 4.10a ELLI- og DILI-eksempler

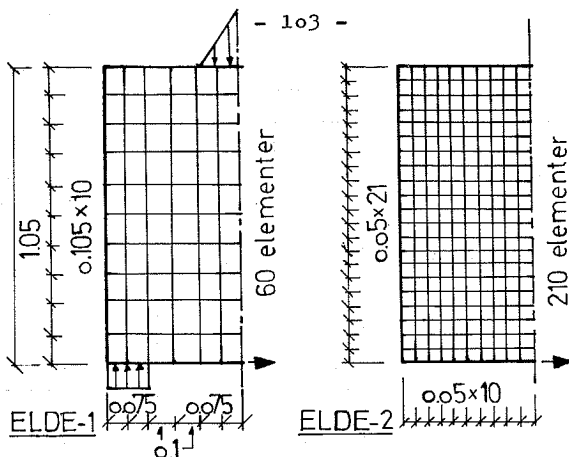


Fig. 4.10b Elementinddeling ved elastisk beregning af spændinger og armering.

gement 2 og 1 (mindste behov henholdsvis 34.5 og 42.3). Sammenholdes dette med edb-forbruget fremgår, at DILI-metoden er langt den fordelagtigste. Det ekstra armeringsbehov i forhold til den teoretiske stringerløsning ses for de betragtede DILI-eksempler at være af størrelsesordenen 5-15% ved linearisering LIN = 4. Ved LIN = 2 fås et ekstra behov på 20-25% for DILI-eksemplerne, hvilket skyldes, at et tryk som nævnt ikke kan overføres uden brug af armering.

Armeringsbehovet, bestemt på grundlag af en elastisk beregning<sup>+)</sup> er vist i tabel 4.3b. Armeringen er bestemt på grundlag af armeringsformlerne (2.6) og (2.7), hvorefter armeringsparametrene er tillagt det største lokale armeringsbehov i det tilhørende område.

Det fremgår af tabellen, at der altid fås et betydelig større armeringsbehov end fundet ved såvel DILI- som ELLI-metoden. Armeringsbehovet er op til 5 gange større end hvad den teoretiske stringerløsning giver. Tilfældet med 2 armeringsparametre pr. element giver dog kun 40-50% mere armering end stringerløsningen.

Konklusionen af ovenstående er da, at når der indføres et rimeligt antal armeringsparametre (3-4), giver DILI-metoden og linearisering LIN=4 relative "fejl", der ligger i intervallet 5-15% i forhold til en idealiseret stringerløsning. Andre lineariseringer el. anvendelse af ELLI-metoden giver dårligere resultater, men dog væsentlig bedre end armeringsbestemmelse på grundlag af en elastisk spændingsfordeling.

<sup>+)</sup> De elastiske spændingsfordelinger er bestemt på grundlag af en normal, elastisk elementmetode. De nødvendige resultater hertil er velvilligt stillet til rådighed af Jan Bäcklund.

edb eks.	LIN 3)	Armeringsarr.	$F_j^{\text{tot}}$	$\frac{F_j^{\text{tot}}}{F_j^{\text{tot}}, \text{teor}}$	edb- behov $\times 10^{-4} \text{ MP}^2)$
ELLI-3	1	A3.1	81.2	2.82	2008
ELLI-3	2		53.3	1.85	1811
ELLI-4	1	A3.1	64.8	2.25	2878
ELLI-4	2	"	42.3	1.47	3438
DILI-5A	1	A3.2	65.2	2.26	82
DILI-5A	2	"	34.7	1.20	107
DILI-5B	1	A3.2	66.8	2.31	84
DILI-5B	2	"	34.5	1.20	107
DILI-5C	1	A3.2	64.5	2.24	82
DILI-5C	2	"	36.6	1.27	106
DILI-5A	4	A3.2	31.0	1.08	102
DILI-5B	4	"	30.3	1.05	105
DILI-5C	4	"	32.5	1.13	104
DILI-6A	4	"	33.0	1.15	106
DILI-6B	4	"	32.3	1.12	140
DILI-6C	4	"	34.5	1.20	138
DILI-7B	4	"	31.5	1.09	
ELLI-4	2	A3.3	55.8	1.94	2869
DILI-5C	2	"	51.1	1.77	87*
DILI-6C	2	"	56.1	1.95	105*
DILI-5C	4	"	44.9	1.56	91*
DILI-6C	4	"	42.3	1.47	118*
DILI-5C	4	A3.4 (56 par)	21.7 <sup>1)</sup>	0.89 <sup>1)</sup>	126*
DILI-6C	4	" (90 par)	22.8 <sup>1)</sup>	0.93 <sup>1)</sup>	160*

1) Min. armeringsbehov:  $57.7(0.5-0.075) = 24.5$ . Årsagen til, at det beregnede armeringsbehov er mindre end det teoretiske, skyldes lokale forhold ved understøtningsbelastningen.

2) NEUCC-betalingsenhed: 1 MP = 1 maskinpoint.

3) Alle restriktioner er medtaget ved hver beregning, dvs. LIN = 1 giver 10 restriktioner pr. knude osv. Ved de med \* mærkede dog kun medtaget armeringsrestriktioner.

Tabel 4.3 a. Armeringsbehov ved eksempel 3  
for ELLI- og DILI-beregninger.

edbeks.	Armeringsarr.	$F_j^{\text{tot}}$	$F_j^{\text{tot}}$ $F_{j,\text{teor}}^{\text{tot}}$
ELDE-1	A3.1	162.9	5.65
ELDE-1	A3.2	109.0	3.78
ELDE-1	A3.3	81.9	2.84
ELDE-1	A3.4	39.9	1.39
ELDE-2		41.1	1.43

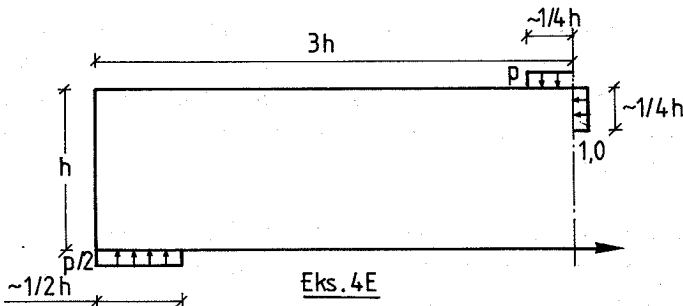
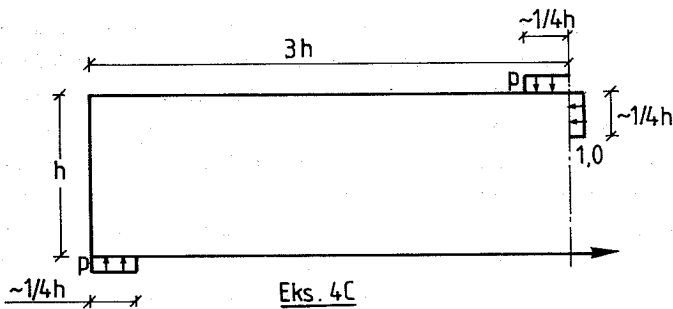
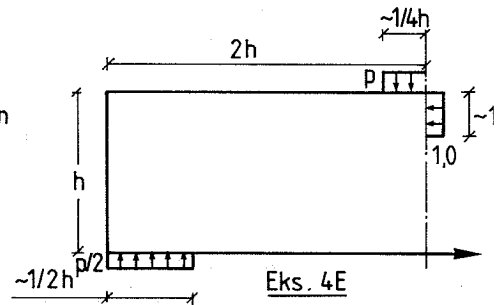
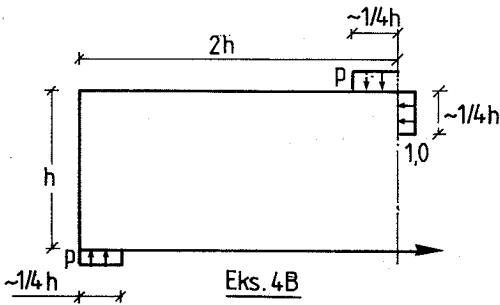
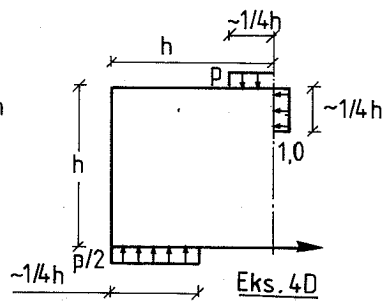
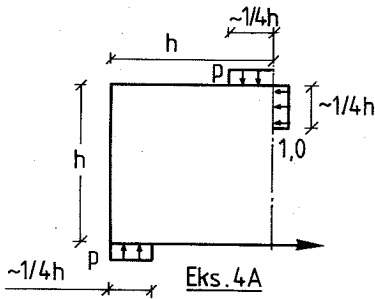
Tabel 4.3b. Armeringsbehov ved eksempel 3 på grundlag af elastisk spændingsfordeling.

#### 4.5 Eksempel 4: Jernbeton-bjælkeskiver med konstant moment ( $\sigma_c = \infty$ )

For de på fig. 4.11 viste jernbetonskiver optimeres armeringsbehovet, idet der ikke i restriktionerne tages hensyn til betonstyrken, men i midtersnittet regnes trykkraften fordelt over ca.  $1/4h$  som vist. På fig. 4.12 er netinddelingen skitseret, idet der kun benyttes DILI-beregninger. Armeringen regnes givet ved 3 hold parametre, et antal svarende til x-armering i undersiden, én parameter svarende til x-armeringen de øvrige steder, samt en parameter svarende til lodret y-armering. x- og y-armering refererer til armering i de pågældende akseretninger, som vist på fig. 4.13. Der benyttes kun linearisering  $LIN = 4$ .

Iøvrigt skal bemærkes, at der ved de numeriske beregninger tages hensyn til, at det vandrette tryk ved punkt B skal kunne fordeles jævnt over stykket  $d_y/4$  til hver side ved den øverste netlinie for at være statisk korrekt. Derfor reduceres den regningsmæssige skivehøjde.

Som sammenligningsgrundlag ved armeringsberegningerne i tabel 4.4 benyttes den på fig. 4.14 skitserede løsning, hvor midtersnittets moment regnes afgørende.



$t = 0,10$   
 $h = 1,00$   
 $p$  afpasses ud  $t$  momentet.

Fig. 4.11. Jernbetonbjælkeskiver med fast moment

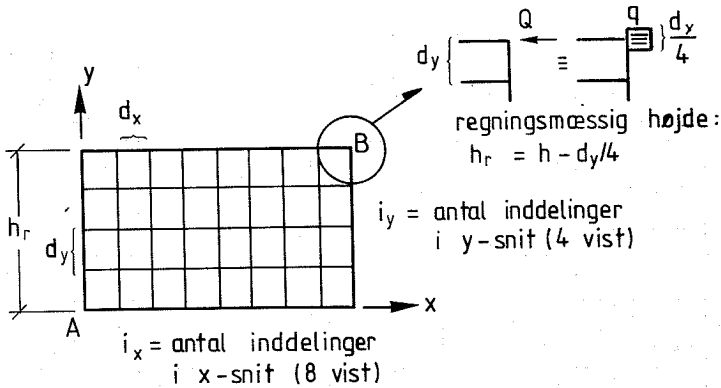
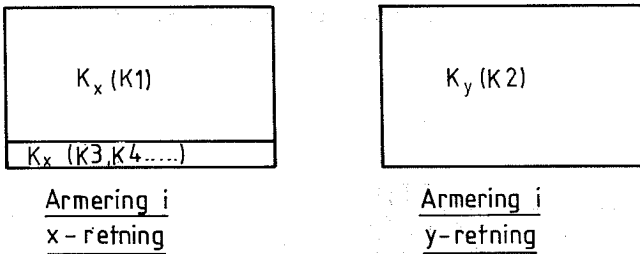


Fig. 4.12. Netinddeling ved DILI-eksempler



K3, K4.... angiver hovedarmeringen i undersiden. Ved DILI- 8, 10, 11 er denne placeret i nederste netline; ved DILI- 9 er den fordelt over de 2 nederste netlinier - se tabel 4.4.

Fig. 4.13. Armeringsarrangement A4.1

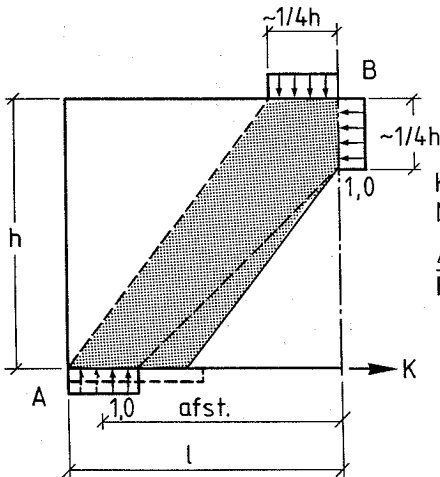
	edb eks.	l	i <sub>x</sub>	i <sub>y</sub>	a <sub>x</sub>	a <sub>h</sub>	x-armering		y-arm		F <sup>total</sup>	
							K <sub>x,h</sub> <sup>max</sup>	F <sub>x,ø</sub>	F <sub>y</sub>	F <sub>total</sub>	F <sub>total, teor</sub>	F <sub>total, teor</sub>
EKS 4A	DILI-8	h	6	6	7	1	0.259	0.007 <sup>+</sup>	0.033	0.233	1.06	1.11
	DILI-9	h	10	10	7	2	0.257	0.014 <sup>+</sup>	0.021	0.244	1.11	
EKS 4B	DILI-10	2h	12	6	13	1	0.259	0.003 <sup>+</sup>	0.028	0.436	0.93	
EKS 4C	DILI-11	3h	18	6	19	1	0.259	0.0 <sup>+</sup>	0.084	0.615	0.86	
EKS 4D	DILI-8	h	6	6	7	1	0.268	0.023	0.012	0.214	1.14	
	DILI-9	h	10	10	7	2	0.269	0.015	0.005	0.209	1.11	
EKS 4E	DILI-10	2h	12	6	13	1	0.263	0.005	0.044	0.434	0.99	
EKS 4F	DILI-11	3h	18	6	19	1	0.264	0.0	0.088	0.614	0.89	

antal hovedarmerings-  
parametre i x-retningen

↖ ↗  
antal vandrette netlinier til  
hovedarmeringen (undersidearm.)

<sup>+</sup>) Armeringsparametren multipliceret med 2.0 i forhold til øvrige parametre under optimeringsfasen ⇒ x-arm. flyttes til y-arm.

Tabel 4.4. Armeringsbehov ved armeringsarrangement A4.1, eks. 4



$$K = 1 \cdot 1/4h$$

$$M = 1/4h \cdot 7/8h = 7/32h^2$$

Armeringsbehov:

$$F_{total, teor.} = K \cdot afst. = 1/4 \cdot h \cdot afst. = 1/4 \cdot h \cdot (l - 1/8h)$$

$$[ \text{lang underst.: } F_{total, teor.} = 1/4h \cdot (l - 1/4h) ]$$

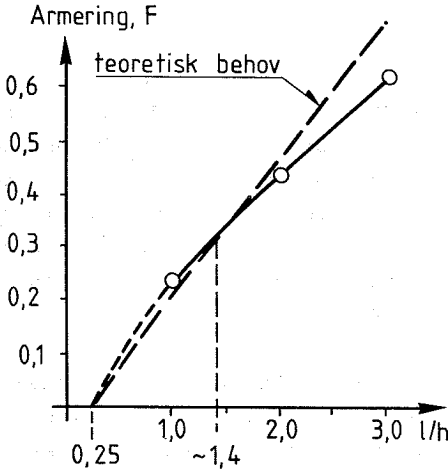
Fig. 4.14. Tilnærmet analytisk stringer-løsning ved armeringsarrangement A4.1



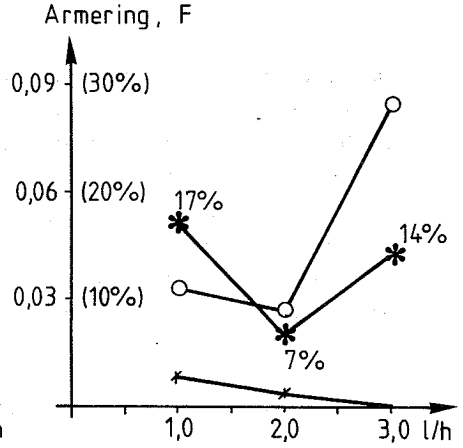
Det fremgår af beregningerne, at armeringsbehovet for de korte skiver bliver lidt for stort (5-15%), hvilket skyldes de samme forhold, som er nævnt ved eks. 3 samt den reducerede skivehøjde. Ved de lidt længere skiver, hvor trykket spredes mere ud via den lodrette armering fås betydelig bedre resultater. Det bemærkes, at for et længde/højde-forhold på ca. 1.4, ved skiverne med kort understøtning, fås mindre armeringsbehov end svarende til konstant undersidearmering - se fig. 4.15a-4.16a.

Med hensyn til den fordelte x- og y-armering må det konkluderes, at den ved de korte skiver er nødvendig til overførsel af trykkraften mellem område A og B. Dette skyldes, at trykzonen skal tilpasses meget nøje for at kunne opfylde grænsebetingelserne ved A og B, som det fremgår af fig. 4.14. Årsagen, til at det sekundære armeringsbehov bliver så stort, ligger imidlertid også i, at armeringen føres ud i områderne uden for trykzonen - jf. fig. 4.1. Dette følger bl.a. af, at den brede understøtning ved eks. 4D,E,F ikke markant påvirker det sekundære armeringsbehov ved de korte bjælkeskiver. Selv om trykzonen iflg. fig. 4.14 skulle "passe" bedre i dette tilfælde, skal der altså stadig nogen ekstra armering til. Ved de lange og mellemlange skiver fås hovedsagelig kun behov for lodret fordelingsarmering - se fig. 4.15b-4.16b og tabel 4.4- , da trykkraften føres ned til trækarmeringen før understøtningen. Det bemærkes, at det sekundære armeringsbehov først er faldende i procent af totalarmeringen for dernæst at blive større igen for voksende l/h. Dette skyldes, at trykzonen bliver bredere og derfor lettere at tilpasse, og at den lodrette armering bevirker totalt mindre armeringsbehov ved store l/h forhold.

Når der kun benyttes 2 armeringsparametre, en for x-retningen og en for y-retningen, fås de på fig. 4.17 viste forhold, der benævnes armeringsarrangement A4.2.

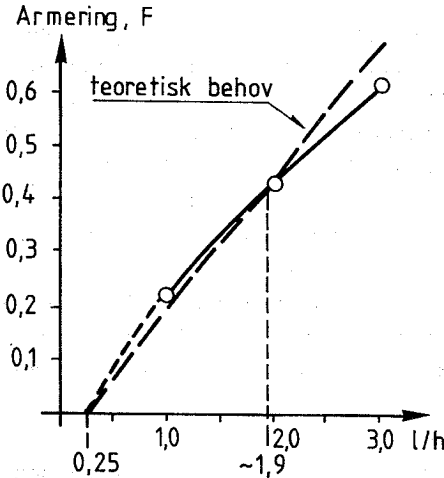


a) Totale armeringsbehov

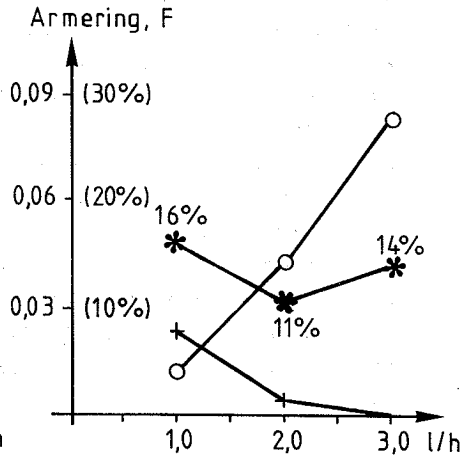


b) Sekundære armeringsbehov

Fig. 4.15. Armeringsbehov ved eksempel 4A,B,C.



a) Totale armeringsbehov



b) Sekundære armeringsbehov

Fig. 4.16. Armeringsbehov ved eksempel 4D,E,F

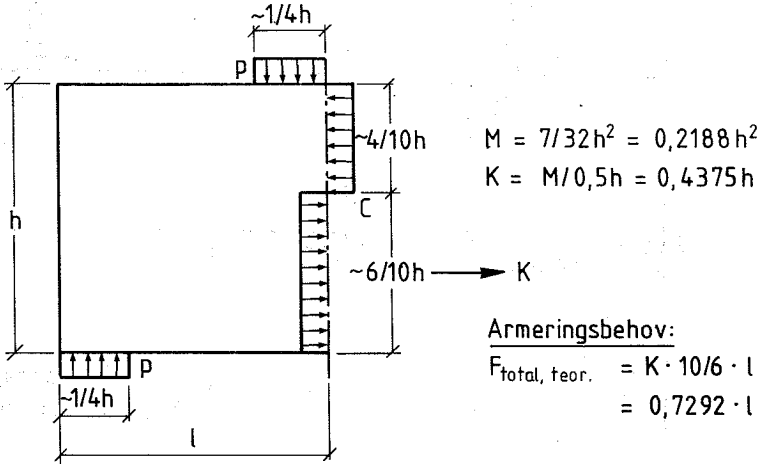


Fig. 4.17. Tilnærmet analytisk løsning ved armeringsarrangement A4.2

Armeringsbehovet fremgår af tabel 4.5. Der fås et ekstra forbrug i forhold til den teoretiske armeringsmængde på 5-10%, og det fremgår, at der ikke er markant forskel på kort og lang bjælkeskive. En af årsagerne hertil kan være det voldsomme skift i punkt C mellem tryk og træk.

edb eks.	l	$i_x$	$i_y$	$a_x$	x-arm $F_x$	y-arm $F_y$	$F_{\text{total}}$	$\frac{F_{\text{total}}}{F_{\text{total, teor}}}$
DILI-8	h	6	6	1	0.788	0.002	0.790	1.08
DILI-1c	2h	12	6	1	1.466	0.093	1.559	1.07
DILI-11	3h	18	6	1	2.246	0.093	2.389	1.07

↑  
antal hovedarmerings-  
parametre i x-retningen

Tabel 4.5. Armeringsbehov ved eksempel 4A', B', C'

#### 4.6 Eksempel 5: Jernbeton-bjælkeskiver med konstant belastning

Idet der i dette eksempel tages hensyn til betonstyrken, bestemmes armeringsbehovet for de på fig. 4.18 viste eksempler.

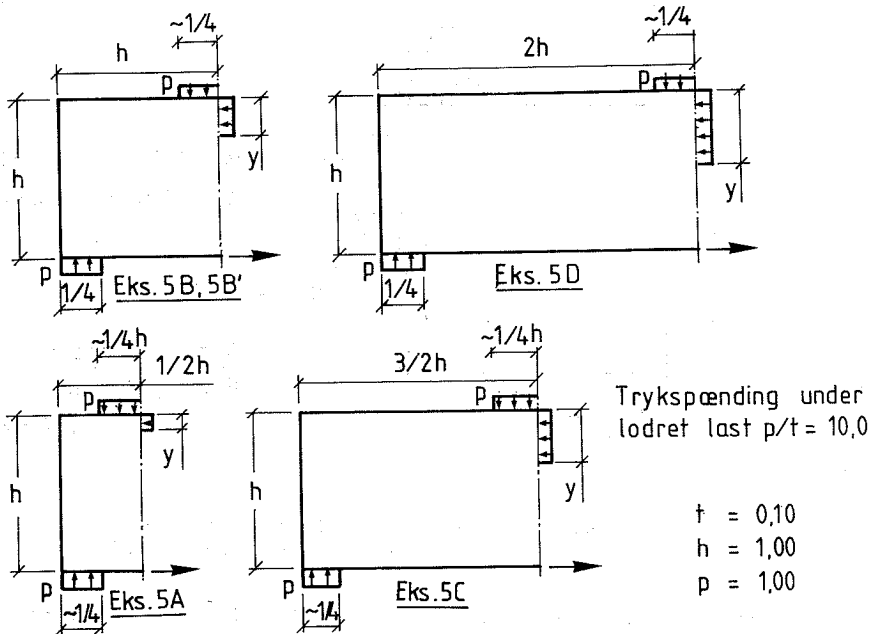


Fig. 4.18. Jernbetonskiver med konstant lodret belastning

Der benyttes kun DILI-eksempler. Skiverne inddeles som vist på fig. 4.12, dvs. under hensyntagen til, at det vandrette tryk ved B skal fordeles  $d_y/4$  til hver side ved den øverste vandrette netlinie. Armeringsarrangementet vælges som vist på fig. 4.13, idet der dog ved eks. 5B' kun benyttes én parameter til den vandrette undersidearmering. Hovedarmeringen virker i nederste vandrette netlinie. Endelig regnes betonstyrken at kunne antage en størrelse på henholdsvis 1.1, 1.25, og 1.5 gange trykspændingerne for lodret last ( $p/t = 10.0$  iflg. fig. 4.18).

Tabel 4.6. viser resultatet af beregningerne. Det fremgår, at for  $l = 1/2h$  fås 33% for megen armering i forhold til stringerløsningen, når LIN = 4 anvendes. Det fremgår endvidere, at for samme armeringsarrangement er det ekstra behov faldende for voksende  $l/h$  forhold. Som ved de foregående eksempler viser det, at der altid er behov for en vis armering til at føre trykket fra A til B, men efterhånden som trykzonen spredtes ud, er denne

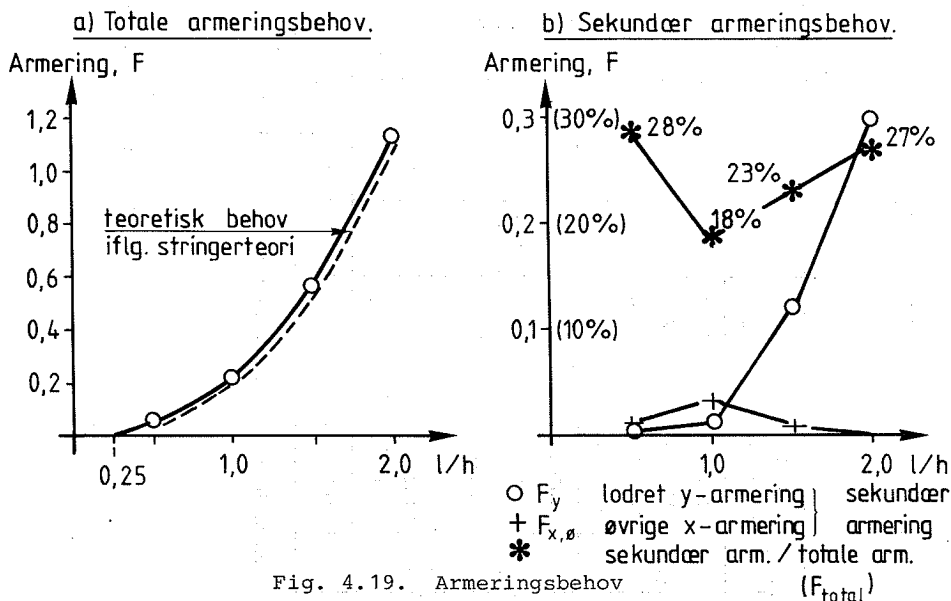
edb eks.	LIN	$\sigma_c$	l	$i_x$	$i_y$	$a_x$	x-arm		y-arm		$F_{total}$	$Y_{teor}$	$F_{total,teor}^{+)}$	$\frac{F_{total}}{F_{total,teor}}$
							$K_{x,h}^{max}$	$F_{x,\phi}$	$F_y$	$F_y$				
EKS 5A	DILI-12	4	12.5	3	6	4	0.069	0.009	0.0	0.032	0.051	0.024	1.33	
	DILI-12	2	12.5	3	6	4	0.070	0.017	0.0	0.042	0.051	0.024	1.75	
EKS 5B	DILI-13	4	11.0	6	6	7	0.224	0.029	0.009	0.208	0.188	0.181	1.15	
	DILI-13	4	12.5	6	6	7	0.222	0.026	0.011	0.204	0.163	0.179	1.14	
	DILI-13	4	15.0	6	6	7	0.218	0.020	0.014	0.199	0.134	0.176	1.13	
	DILI-13	2	12.5	6	6	7	0.219	0.036	0.018	0.229	0.163	0.179	1.28	
EKS 5C	DILI-14	4	12.5	9	6	10	0.398	0.009	0.120	0.565	0.293	0.504	1.12	
	DILI-14	2	12.5	9	6	10	0.399	0.015	0.176	0.626	0.293	0.504	1.24	
EKS 5D	DILI-15	4	11.0	12	6	13	0.718	0.0	0.394	1.227	0.547	1.129	1.09	
	DILI-15	4	12.5	12	6	13	0.645	0.0	0.298	1.117	0.452	1.060	1.05	
	DILI-15	4	15.0	12	6	13	0.583	0.0	0.196	1.019	0.355	0.998	1.02	
	DILI-15	2	12.5	12	6	13	0.630	0.005	0.314	1.151	0.452	1.060	1.08	
EKS 5E	DILI-13	4	15.0	6	6	1	0.218	0.021	0.014	0.254	0.134	F=LK=0.201	1.26	

antal hovedarmeringsparametre i x-retningen  $\rightarrow$   $^{+)}$  Armering bestemt i henhold til stringerteori  
 $M = (1 - 1/4h) 1/4hp \Rightarrow K \Rightarrow F = (1 - 1/8h) K$

Tabel 4.6. Armeringsbehov ved eksempel 5

ekstra mængde faldende i forhold til totalarmeringen. Ved skiver med meget lille stringer-armeringsbehov, dvs. korte bjælkeskiver, er metoden derfor dårligst egnet. Årsagen til, at armeringsbehovet for de lange bjælker ikke bliver mindre end stringerarmeringen, som ved eks. 4, er den bredere trykzone, der giver anledning til mindre højde mellemkomposanterne og derfor større armeringsbehov. Resultatet bliver derfor, at der skal et større  $l/h$  forhold end 1.4 til, før den beregnede armering bliver mindre end stringerarmeringen. Af eks. 5D,  $\sigma_c = 15.0$  synes at fremgå, at et  $l/h$  forhold på godt og vel 2 bliver afgørende. Eks. 5B' sammenlignet med det tilsvarende 5B eksempel viser, at når der benyttes ganske få armeringsparametre, da vil de lokale armeringsbehov blive multipliceret voldsomt op og give et betydeligt ekstra samlet behov.

Endelig viser fig. 4.19, at det sekundære armeringsbehov antager samme principielle fordeling som ved de foregående eksempler, dvs. vanskeligheder med at føre trykstringeren fra A til B giver et betydeligt armeringsbehov i såvel x- som y-retningen.



### KAPITEL III. BESTEMMELSE AF BÆREEVNE FOR STRIBEFUNDAMENTER PÅ JORD

#### 1. STRIBEFUNDAMENTER OG DERES BÆREEVNE

I dette afsnit defineres begrebet et stribefundament, og den traditionelle bæreevneformel for stribefundamenter på halvueligt jordlegeme omtales. Desuden omtales andre ideal-plastiske metoder til bæreevnebestemmelse.

##### 1.1 Fundamenters bæreevne

Ved et fundament forstås den del af et bygværk, der overfører belastningen til de underliggende, bærende jordlag.

Normalt benyttes ved fundamentsberegninger en opdeling i henholdsvis sætnings- og bæreevneproblemer. De første omhandler fundamentets deformationer i brugstilstanden, dvs. ved belastninger, der ikke giver anledning til brud i jordmasserne. De sidste omhandler fundamentets belastningsforhold, når der netop opstår brud i jordmasserne, dvs. i brudtilstanden.

Med et fundaments bæreevne menes den værdi af fundamentfladens lodrette middelbelastning, der netop nås i brudtilstanden. Fundamentsfladen angiver fundamentets vandrette afgrænsning mod jordmasserne.

Jordmaterialerne kan i brugstilstanden med nogen tilnærmelse siges at opføre sig elastisk. I brudtilstanden gælder, at de fleste jordarter besidder ret gode plastiske egenskaber, som det fremgår af afsnit 2.1.

Bæreevnen for et fundament kan derfor i de fleste tilfælde bestemmes ved ideal-plastiske beregninger, når de nødvendige materialekonstanter kendes for den pågældende jord.

##### 1.2 Metoder til bestemmelse af stribefundamenters bæreevne

I denne afhandling vil kun blive betragtet såkaldte stribefundamenter, der er karakteriseret ved at være meget lange og

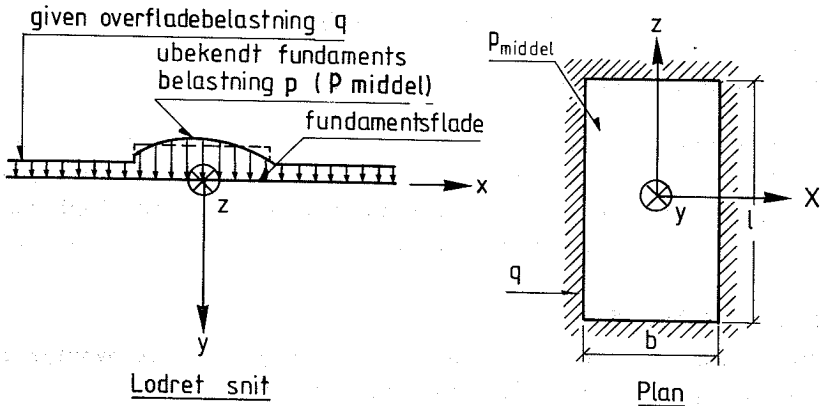


Fig. 1.1. Stribefundament ( $l \gg b$ )

og have konstant bredde, svarende til  $l \gg b$  i fig. 1.1. For fundamenter af denne type er det iflg. afsnit 3.1 tilstrækkeligt at betragte spændingerne i den på fig. 1.1 angivne x,y-plan, dvs.  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\sigma_y$ . Denne forenkling bevirker, at de aktive spændinger kan bestemmes på tilsvarende vis som ved skiver.

Vi vil i det følgende kun betragte stribefundamenter på et halvuendeligt jordlegeme, som det er vist på fig. 1.1. For et sådant fundament angives bæreevnen pr. arealenhed normalt ved følgende udtryk, der også benyttes i den danske funderingsnorm [FUN, 1977]:

$$p = \frac{1}{2} \gamma b N_\gamma + q N_q + c N_c, \quad (1.1)$$

hvor

$\gamma$  = rumvægten

$q$  = overfladebelastning uden for fundament

$c$  = kohæsionen

$N_\gamma$ ,  $N_q$  og  $N_c$  er dimensionsløse bæreevnefaktorer, der er afhængige af friktionsvinklen  $\phi$ .



Denne formel, der er foreslået af Terzaghi [TER, 1943], er fremkommet ved superposition af analytiske, ideal-plastiske løsnin-  
ger til simple problemer for homogene jordmasser.

I første fase bestemmes  $c N_c$  og  $q N_q$  for et vægtløst legeme, og  
i anden fase bestemmes  $1/2 b \gamma N_\gamma$  - se f.eks. [CHE, 1975].

Formlen synes i de fleste tilfælde at være konservativ sva-  
rende til, at den reelle bæreevne er større end den fundne,  
jf. [LU & M, 1953].

Formlen er altså en tilnærmelsesformel, og det gælder, at  
 $N_\gamma$ -faktoren hidtil kun er ret dårligt bestemt. Endelig gæl-  
der formlen kun for stribefundamenter på et halvuendeligt, homo-  
gent medium. I andre tilfælde må enten gøres yderligere til-  
nærmelser, for at (1.1) kan benyttes, eller der må benyttes spe-  
cielle løsningsmetoder.

Inden for geoteknikken benyttes ofte den såkaldte sliplinieteo-  
ri, der kræver tilfredsstillelse af ligevægts- og flydebetingel-  
ser i antagne slip- eller brudlinier. Spændingsfordelingen langs  
disse linier er bl.a. angivet af Kötter [KOT, 1903]. Herefter bestem-  
mes bæreevnen ved global ligevægt. Haves en statisk tillade-  
lig og sikker spændingstilstand i den øvrige del af jordlegemet,  
er der tale om en nedreværdimetode, i modsat fald kan løsningen  
være en øvreværdi. Dette er tilfældet, såfremt et kinematisk  
flytningsfelt svarende til sliplinierne kan bestemmes.

Benyttes tilnærmede sliplinier, f.eks. cirkelbuer og logaritmi-  
ske spiraler, kan bæreevnen umiddelbart bestemmes ved ligevægts-  
beregning. Indlægges andre sådanne sliplinier, kan forskellige  
bæreevner bestemmes. Den bedste løsning kan dernæst findes som  
minimum for disse, hvorfor denne variant af metoden også benæv-  
nes ekstremmetoden.

For de fremgangsmåder, der er omtalt ovenfor gælder altså, at  
de generelt hverken giver sikre øvreværdi- eller nedreværdi-

løsninger. Desuden har det vist sig, at de er ret unøjagtige ved ikke-vægtløse legemer, dvs. ved de jordlegemer, der forekommer i praksis.

For simple problemer har de egentlige ekstremalprincipper dog været benyttet, men på dette område har udviklingen inden for geoteknikken været temmelig konservativ på trods af jordarternes ideal-plastiske karakter. Nyere værker af bl.a. Bent Hansen [HAN, 1966] og Chen [CHE, 1975] har dog præciseret og afklaret beregningsmetoderne i relation til den ideal-plastiske teori. I sidstnævnte reference er adskillige analytiske løsninger angivet, ligesom der er givet en generel oversigt over andre metoder. To numeriske optimeringsmetoder er angivet af dels Vollenweider [VOL, 1969], dels Lysmer [LYS, 1970] - jf. kapitel I, afs. 2.1.2. For  $c \neq 0$  fås hos begge ret gode løsninger. For  $c = 0$ , der kun er behandlet af Vollenweider, fås trods dyre beregninger, ret dårlige resultater, idet f.eks.  $c = 0$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $\gamma = 2,0$  bevirker  $N_\gamma = 9.0$ , sammenholdt med 27.0 for en analytisk bestemt øvre værdi.

## 2. FLYDEBETINGELSER FOR JORD

Betragtes de forskellige jordarters fysiske opførsel fremgår, at det normalt er en udmærket tilnærmelse at betragte disse som havende ideal-plastisk opførsel. Som flydebetingelse kan Coulombs brudbetingelse anvendes.

### 2.1 Jordarternes fysiske opførsel

Jordarternes opførsel i brudtilstanden tilnærmes normalt med en ideal-plastisk opførsel. Dette svarer oftest godt til den virkelige opførsel, som det fremgår af arbejdskurverne fra triaksialforsøg på fig. 2.1 - jf. [HA m.fl., 1970]. Det fremgår dog, at for tætpakket sand og for drænet, forkonsolideret ler er tilnærmelsen mindre god, hvorfor der kræves særlig agtpågivenhed ved disse materialer.

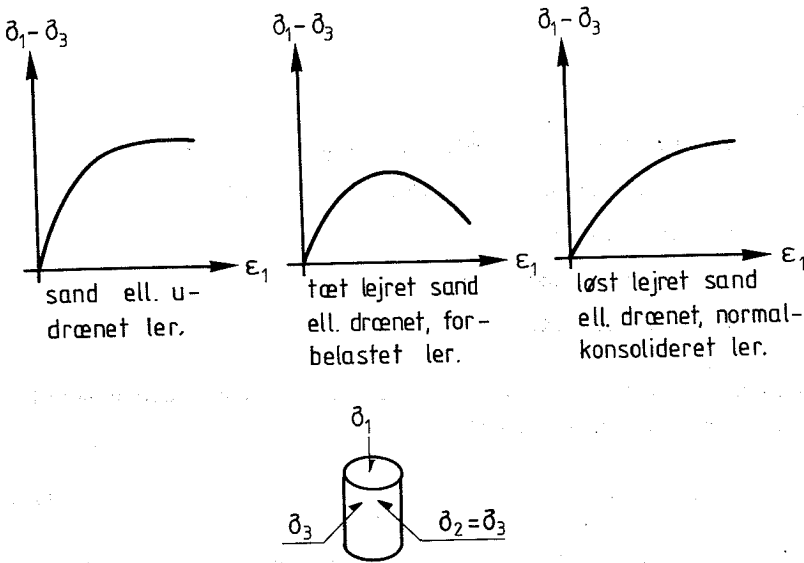


Fig. 2.1. Arbejdskurver for jordarterne iflg. triaksialforsøg

## 2.2 Jordlegemer som ideal-plastiske legemer

### 2.2.1 Jordarter som ideal-plastiske materialer

I det følgende vil jordarterne blive betragtet som værende ideal-plastiske materialer.

Det første tilløb til etablering af en flydebetingelse for jordarterne blev gjort allerede i 1773 af C.A. Coulomb [COU, 1773]. Coulomb-hypotesen fremkom på grundlag af iagttagelse af dels brud i stenprismer påvirket af én-akset tryk, og dels brud i jord bag støttemure. Disse iagttagelser viste, at brudet skete langs visse flader, såkaldte glideflader. For at få brud antog Coulomb da, at der dels skulle overvindes en indre kohæsion, og dels en indre friktion, hvilket blev formuleret som:

$$|\tau| = c - \mu \sigma = c - \operatorname{tg} \varphi \sigma, \quad (2.1)$$

hvor

$\tau$  = forskydningsspændingen langs glidefladen

$\sigma$  = normalspændingen vinkelret på glidefladen

$c$  = kohæsionen

$\mu$  = friktionskoefficienten

$\varphi$  = friktionsvinklen.

Tyskeren Mohr [MOH, 1882] gav brudhypotesen en mere generel form, idet han angav den på formen:

$$f(\sigma, \tau) = 0 \quad (2.2)$$

Afbildes hypotesen (2.1) i et  $(\sigma, \tau)$  diagram, som angivet på fig. 2.2, og indtegnes samtidig Mohr'ske cirkler ses, at betingelsen kan skrives som:

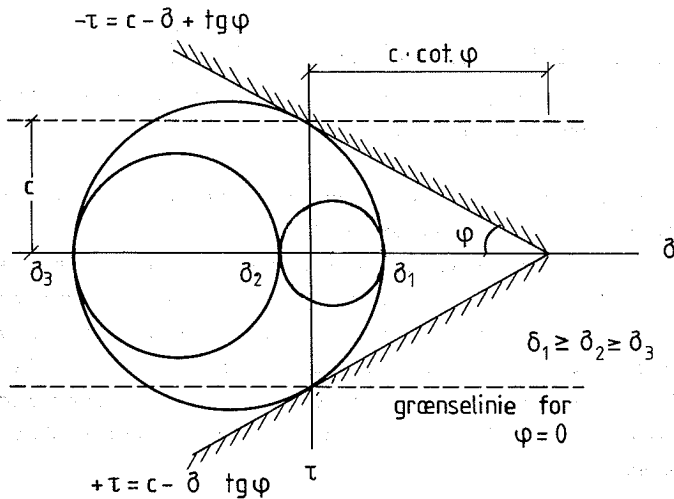


Fig. 2.2. Coulomb's brud- eller flydebet-  
tingelse med Mohr'ske cirkler

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) =$$

$$\frac{1}{2} \sigma_1 (1 + \sin \varphi) - \frac{1}{2} \sigma_3 (1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi = 0, \quad (2.3)$$

hvor

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  er hovedspændingerne.

Coulomb's betingelse har vist sig at være en velegnet flydebetingelse, når den suppleres med en betingelse for adskillelsesbrud - se det følgende afsnit 2.2.2.

### 2.2.2 Coulomb's flydebetingelse

Det grundlæggende udtryk for Coulomb's flydebetingelse fremgår af (2.1) og fig. 2.2, hvor flydebetingelsen er angivet i et  $(\sigma, \tau)$  koordinatsystem. Tilladelige spændinger er bestemt ved Mohr'ske cirkler, som det fremgår af samme figur. Ved omskrivning til hovedspændingerne  $\sigma_1, \sigma_2$  og  $\sigma_3$ , hvor  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  fås formel (2.3). Optegnes denne i et 3-retvinklet koordinatsystem med akser for hovedspændingerne  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ , fås 6 afgrænsende ligninger, der fremkommer ved permutering af  $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = (\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k)$ , idet  $i, j, k$  er forskellige og antager værdierne 1, 2 og 3. Disse ligninger bestemmer som vist på fig. 2.3 en hexagonal pyramide med akse i retningen

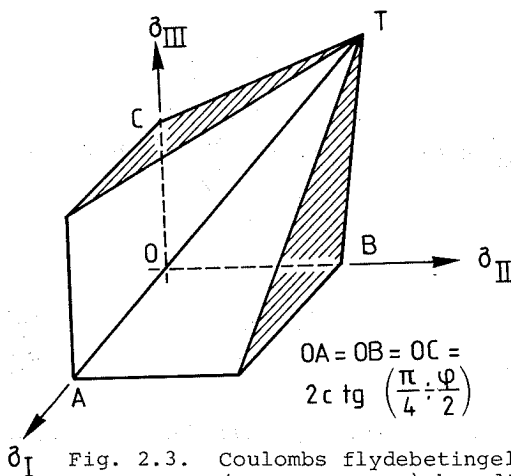


Fig. 2.3. Coulombs flydebetingelse i  $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$  koordinatsystem



Antages den ene hovedspænding  $\sigma_{II}$  lig med en konstant, fås den på fig. 2.4 angivne flydebetingelse, der er symmetrisk om linien  $\sigma_I = \sigma_{III}$ . Specielt falder de mærkede og umærkede punkter sammen for  $\sigma_{II} = 0$ .

Som det fremgår af (2.1) er Coulomb's flydebetingelse alene karakteriseret ved størrelserne  $c$  og  $\varphi$ . Materialer med  $c = 0$  benævnes kohæsionsløse materialer, og flydebetingelsen udarter for disse til en hexagonal pyramide med toppunkt i  $(0,0,0)$  - jf. fig. 2.3. Materialer med  $\varphi = 0$  benævnes friktionsløse materialer, og flydebetingelsen udarter her til en regulær, hexagonal cylinderflade - jf. fig. 2.3. Denne betingelse benævnes også Tresca's flydebetingelse, jf. forholdene ved metaller.

Coulomb's flydebetingelse blev som nævnt postuleret ud fra iagttagelse af trykpåvirkede legemer, der blev belastet til brud. For en lang række materialer har det imidlertid vist sig nødvendigt at supplere den oprindelige hypotese. Dette drejer sig om tilfælde, hvor der kan forekomme trækpåvirkninger, idet man her supplerer med en hypotese om adskillelsesbrud. Når denne uvidelse medtages, taler man om Coulomb's modificerede brud- eller flydebetingelse. Den supplerende betingelse udtrykker, at trækspændingerne ikke må overskride en given værdi, adskillelsesmodstanden  $\sigma_{abr}$  - jf. [POU, 1967] -, dvs.:

$$\sigma < \sigma_{abr} \quad (2.4)$$

Den modificerede betingelse (2.3) og (2.4) antager derfor den på fig. 2.5 viste form i et  $(\sigma, \tau)$  koordinatsystem, hvor de karakteriserende størrelser er  $c$ ,  $\varphi$  og  $\sigma_{abr}$ .

Disse konstanter er i tabel 2.1 angivet for typiske jordmaterialer, ler og sand. Det skal dog bemærkes, at værdierne er meget afhængige af vandindhold og belastningstidsrummet. På fig. 2.6 og 2.7 er de tilhørende flydebetingelser angivet i  $(\sigma, \tau)$  og  $(\sigma_1, \sigma_3)$  koordinatsystemer.

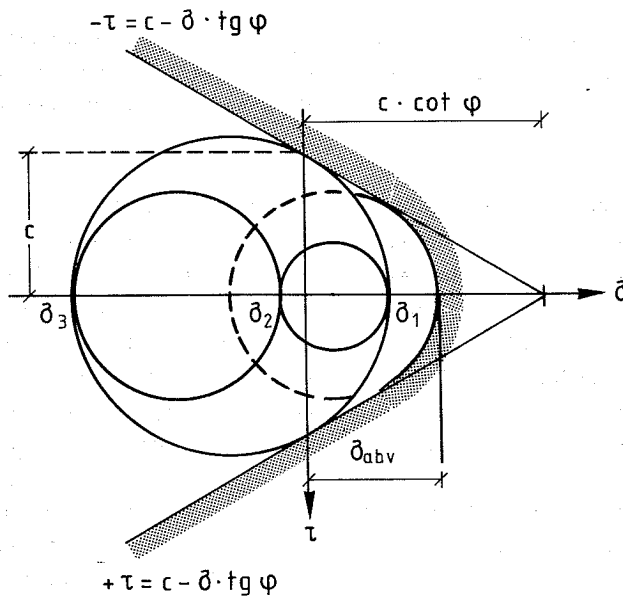


Fig. 2.5. Coulomb's modificerede brud- eller flydebetingelse med Mohr'ske cirkler

Ved stribefundamenter på halvuendeligt medium vil der normalt kun optræde trykspændinger, hvorfor det er tilstrækkeligt at benytte Coulomb's almindelige flydebetingelse.

	LER korttidsbelastet udrænnet	SAND
$c$	$c$	0
$\varphi$	0	$\varphi$
$\sigma_{abr}$	$\frac{1}{2} c$	0

Tabel 2.1. Flydebetingelse-konstanter for ler og sand



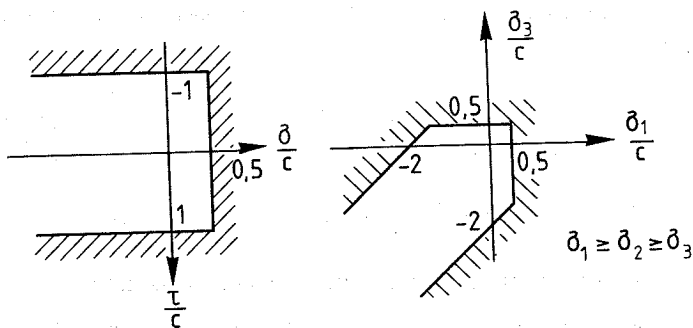


Fig. 2.6. Coulomb's flydebetingelse for ler

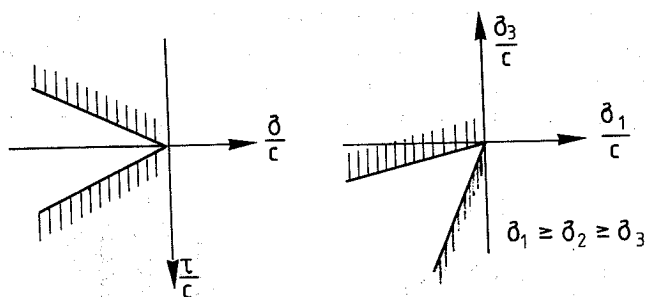


Fig. 2.7. Coulomb's flydebetingelse for sand

Der er i såvel det foregående som det følgende alene regnet med totale spændinger, dvs. der tages ikke hensyn til jordens vandindhold. Hensyntagen til vandindholdet sker som beskrevet i geoteknikken.

Sluttelig skal angives de til (2.3) hørende generaliserede tøjninger, der iflg. formel (1.2) i kapitel I kan udregnes til:

$$\varepsilon_1 = \lambda \frac{1}{2} (1 + \sin\phi), \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = \lambda \frac{1}{2} (1 - \sin\phi). \quad (2.5)$$

### 3. OPTIMERING AF BÆREEVNE FOR STRIBEFUNDAMENTER

Ved stribefundamenter kan deformationstilstanden i jordlagene betragtes som værende plan. Dette bevirker en betydelig forenkling ved bæreevnebestemmelsen. En ideal-plastisk tilnærmelse fører således til, at de i kapitel I udledte metoder kan benyttes.

#### 3.1 Statiske forhold ved stribefundamenter

Ved et stribefundament med indlagt koordinatsystem, som vist på fig. 3.1, gælder, at deformationsændringen i z-retningen kan betragtes som værende nul. Der foregår med andre ord en plan deformation i x,y-planen, således at  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , og de resterende spændingsstørrelser  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  og  $\tau_{xy}$  er uafhængige af z.

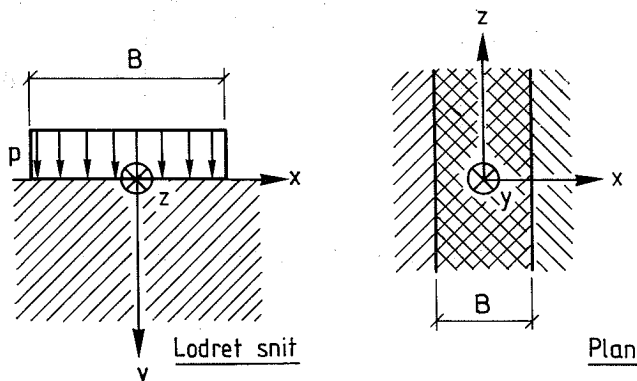


Fig. 3.1. Stribefundament med indlagt koordinatsystem

Da  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , er  $\sigma_z$  en hovedspænding og  $z$ -retningen en hovedspændingsretning, hvorfor de 2 øvrige hovedspændingsretninger må ligge i  $x, y$ -planen. De statiske størrelser i denne plan fremgår af fig. 3.2, hvor træk er regnet positivt. Af (2.5) ses, at  $\epsilon_2$  netop er 0, når  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Dvs. at  $\epsilon_z = 0$ , når blot  $\sigma_z$  er den midterste hovedspænding, som angivet på fig. 3.3.  $\sigma_{\max}$  og  $\sigma_{\min}$  ligger i  $x, y$ -planen.

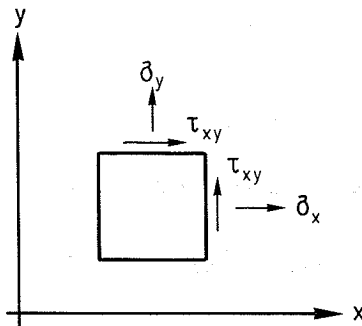


Fig. 3.2. Statiske størrelser i  $x, y$ -planen

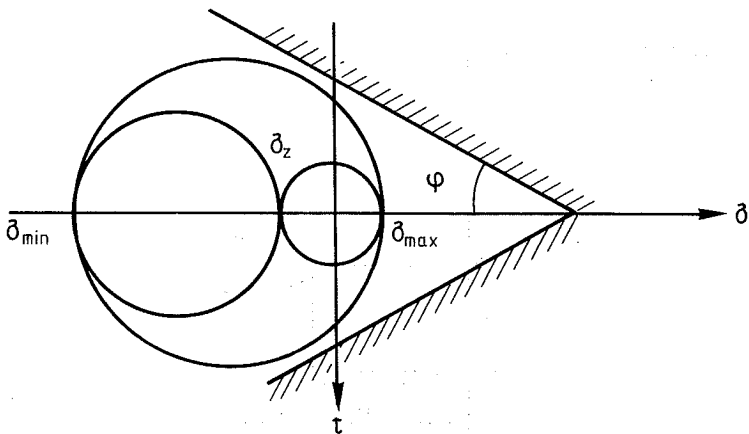


Fig. 3.3. Coulomb's flydebetingelse og plan deformationstilstand

Da  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  er afgørende for om Mohr's cirkel ligger inden for Coulomb's flydebetingelse, er det følgelig tilstrækkeligt at opskrive flydebetingelserne for spændingerne  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\sigma_y$ .

Størrelserne  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\sigma_y$  skal iflg. fig. 3.4 tilfredsstille de sædvanlige statiske ligevægtsligninger for et plant problem, dvs.:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + p_y = 0,$$

hvortil kommer de statiske randbetingelser.

Hovedspændingerne  $\sigma_{\max}$  og  $\sigma_{\min}$  kan bestemmes ved

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \left[ \frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2)$$

hvor  $\sigma_{\min} \leq \sigma_z \leq \sigma_{\max}$ .

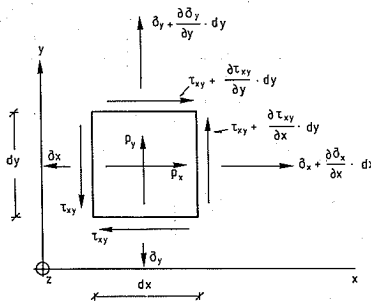


Fig. 3.4. Statisk ligevægtsligninger

Coulomb's flydebetingelse antager i dette tilfælde følgende form, idet (3.2) indsættes i (2.3):

$$\left(\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0. \quad (3.3)$$

Udtrykket, der alene er afhængigt af  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  og  $\sigma_y$ , danner en flade, som er optegnet på fig. 3.5 i et  $(\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y)$  koordinatsystem. Da den i koordinatsystemet  $(s, \tau_{xy}, t)$  antager formen

$$\frac{s^2}{(\sqrt{2}c\cos\varphi)^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{(c\cos\varphi)^2} - \frac{t^2}{(\sqrt{2}c\cot\varphi)^2} = 0, \quad (3.4)$$

drejer det sig om en kegleflade. Ved skæring med  $\sigma_x, \sigma_y$ -planen, svarende til  $\tau_{xy} = 0$ , er  $\sigma_x$  og  $\sigma_y$  hovedspændinger, og der fås den på fig. 3.6 viste afgrænsning. Denne gælder i modsætning til fig. 2.4, når  $\sigma_z$  er den midterste hovedspænding. Skæres

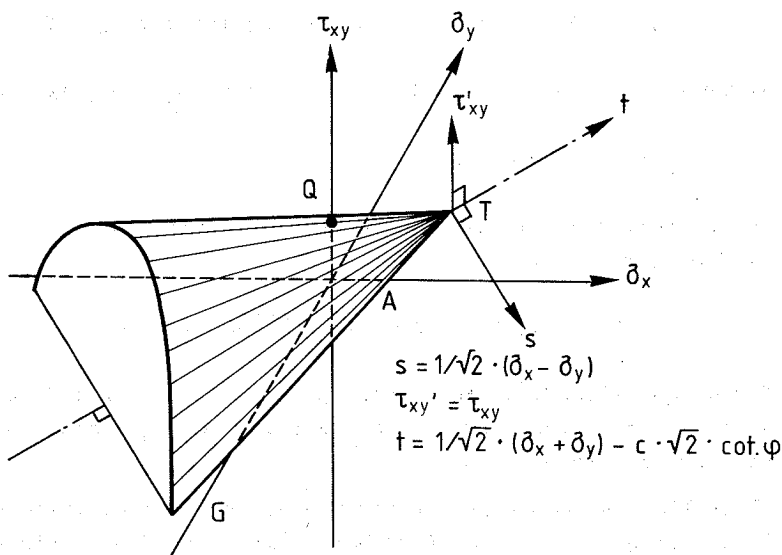


Fig. 3.5. Coulomb's flydebetingelse for plan deformationstilstand

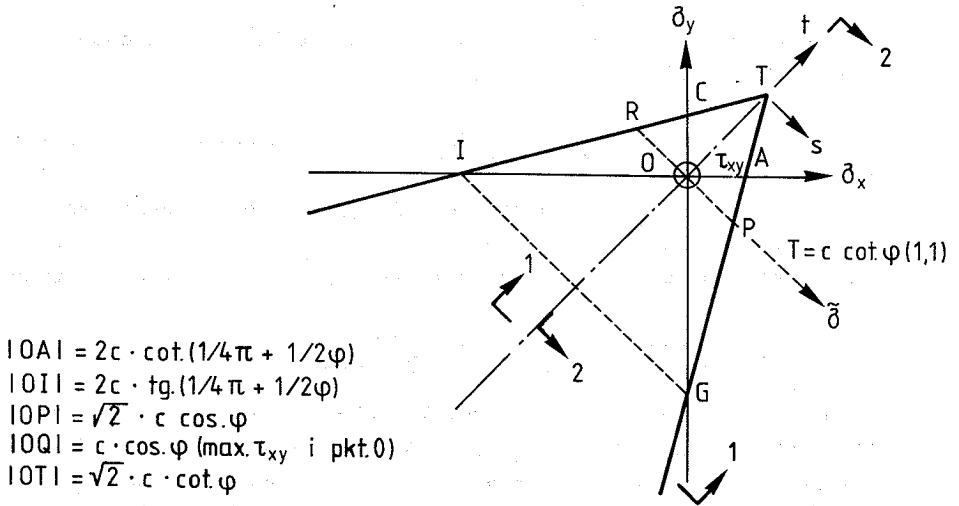


Fig. 3.6. Coulomb's flydebetingelse for  $\tau_{xy} = 0$

keglefladen (3.3) med en plan bestemt ved:  $\sigma_y = -\sigma_x$  fås kurven:

$$\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 = c^2 \cos^2 \varphi, \quad (3.5)$$

der bestemmer en cirkel. Den geometriske skæringskurve kan derimod bestemmes som:

$$(\tilde{\sigma}/\sqrt{2})^2 + \tau_{xy}^2 = c^2 \cos^2 \varphi, \quad (\tilde{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{2} \sigma_x), \quad (3.6)$$

der er en ellipse. Dette er vist på fig. 3.7, snit 1, medens snit 2 viser kurven for  $\sigma_y = \sigma_x$ . Skæring med  $\sigma_y = \text{konstant}$  bestemmer en parabel.

Sluttelig skal bemærkes, at for  $\varphi = 0$ , der giver Trescas's flydebetingelse, udarter flydebetingelsen for fig. 3.5's vedkommende til en cylinderflade med akseretning  $(\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y) = (1, 0, 1)$  og toppunkt T forskydes mod  $(\infty, 0, \infty)$ . Tilstanden  $c = 0$  og  $\varphi = 0$  angiver en kegleflade med toppunkt i  $(0, 0, 0)$ .

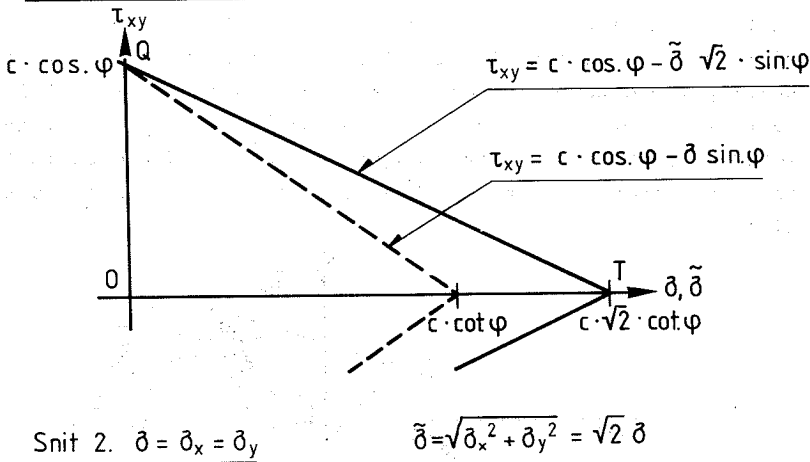
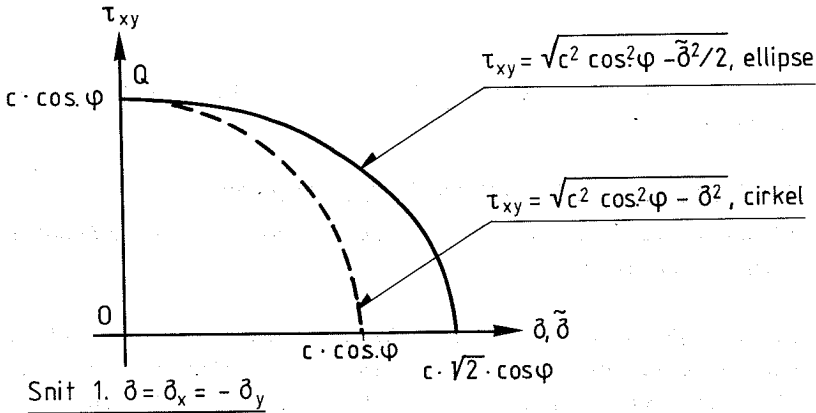


Fig. 3.7. Snit i Coulomb's flydebetingelse for plan deformationstilstand - se fig. 3.5-3.6

### 3.2 Anvendelse af de udviklede numeriske metoder ved stribefundamenter

#### 3.2.1 Stribefundamenter

Med en ideal-plastisk tilnærmelse kan de i kap. I, afsnit 2 udviklede numeriske optimeringsmetoder benyttes til bæreevnebestemmelse for stribefundamenter. Objektfunktionen angiver det bæreevneudtryk, der skal optimeres, dvs. et lineært udtryk i

lastvariablene. De lineariserede flydebetingelser fremgår af det følgende.

### 3.2.2 Lineariserede Coulomb flydebetingelser

Af hensyn til den numeriske optimeringsmetode må flydebetingelserne lineariseres.

Det fremgår af afsnit 3.1, at linearisering af flydebetingelsen kan anskueliggøres ved betragtning af forholdene på en cirkel, eller blot ved forholdene på en kvartcirkel - jf. fig. 3.7, snit 1. Princippet i lineariseringen fremgår af fig. 3.8. Kvartcirklen inddeles i  $n$  fladeafsnit, hvor linie 0,1,2... $n$  angiver skæringslinierne mellem de forskellige plane flader. Retningsvektorerne for disse linier er benævnt  $\bar{b}_0, \bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$ . Den lineariserede flydebetingelse fastlægges således, at den overalt lineariserer inden for den korrekte flydeflade, dvs. på den sikre side.

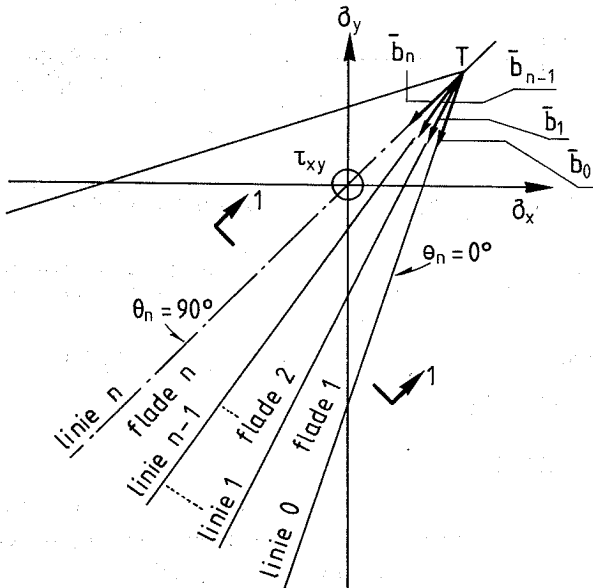


Fig. 3.8. Linearisering af Coulombs flydebetingelse



Den principielle opdeling i lineariserede fladeafsnit fremgår af fig. 3.9. Her angiver  $f$  forholdet  $(R_0 - R_1)/R_0$ , der udtrykker den relative lineariseringsfejl. Denne fejl bliver max.  $1 - \cos(\Delta\theta_i/2)$ . Den maksimale fejl på forskydningsspændingen  $\tau_{xy}$  i forhold til  $R_0$  kan derimod blive noget større, nemlig  $g = (1 - \cos(\Delta\theta_i/2))/\sin\theta_i^m$ . Endelig vil fejlen på  $\tau_{xy}$  i forhold til den aktuelle  $\tau_{xy}$  kunne blive næsten 100% - jf. forholdene ved punkt  $S_0$ .

Iøvrigt er de lineariseringer, der benyttes ved de numeriske beregninger, angivet på fig. 3.10. De tre første lineariseringer fremkommer ved en ækvidistant inddeling af kvartcirklen. Herved bliver fejlen på  $\tau_{xy}$  i relation til  $R_0$  størst ved flade 1. Ved den sidste linearisering er denne fejl gjort ens for de lineariserede fladeafsnit, dvs. der benyttes en ikke-ækvidistant

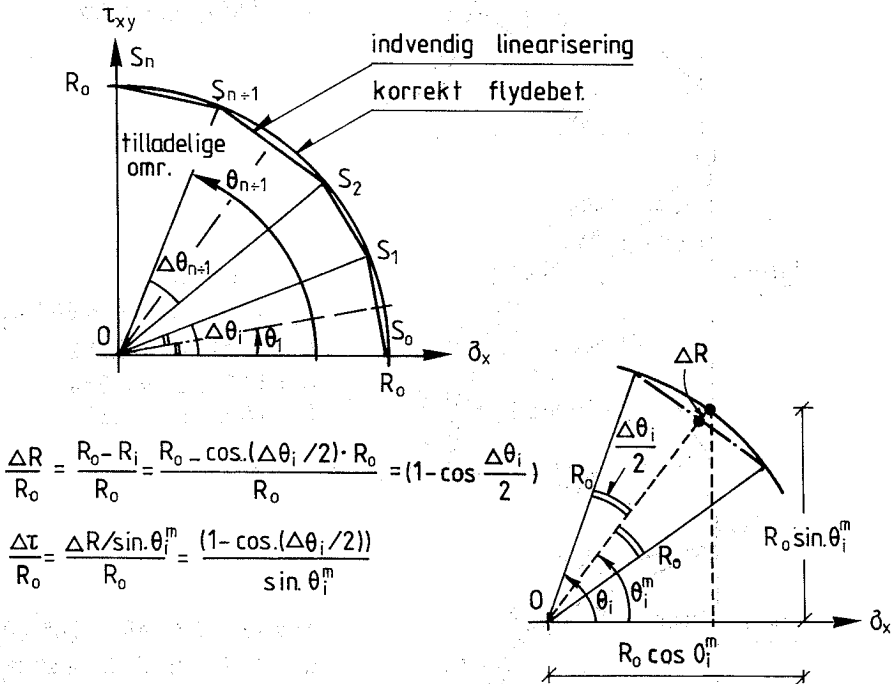
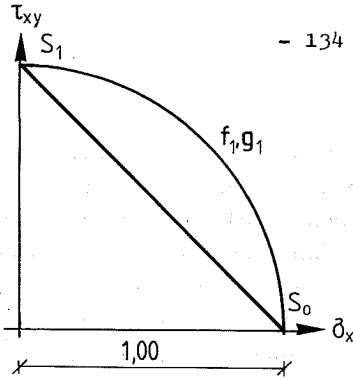


Fig. 3.9. Snit i lineariseret flydebetingelse

LIN=1

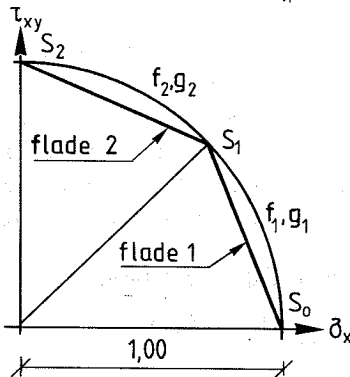


$$n = 1, \Delta\theta = 90^\circ$$

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 90^\circ$$

$$f_1 = 29,3\%, g_1 = 41,4\%$$

LIN=2



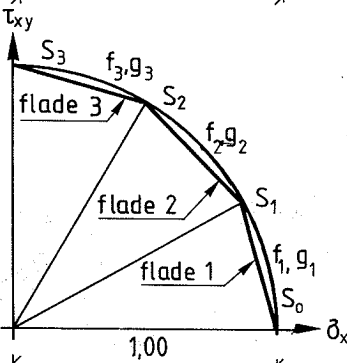
$$n = 2, \Delta\theta = 45^\circ$$

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 90^\circ$$

$$f_1 = 7,6\%, g_1 = 19,9\%$$

$$f_2 = 7,6\%, g_2 = 8,3\%$$

LIN=3



$$n = 3, \Delta\theta = 30^\circ$$

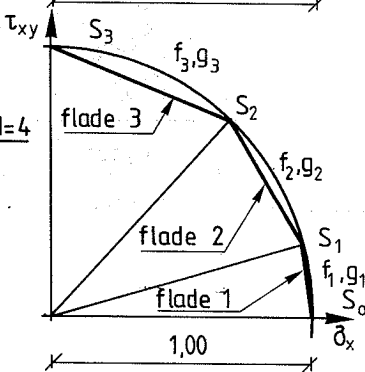
$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 60^\circ, \theta_3 = 90^\circ$$

$$f_1 = 3,4\%, g_1 = 13,2\%$$

$$f_2 = 3,4\%, g_2 = 4,8\%$$

$$f_3 = 3,4\%, g_3 = 3,5\%$$

LIN=4



$$n = 3, \Delta\theta_1 = 16,3^\circ, \Delta\theta_2 = 31,6^\circ, \Delta\theta_3 = 42,1^\circ$$

$$\theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 16,3^\circ, \theta_2 = 47,9^\circ, \theta_3 = 90^\circ$$

$$f_1 = 0,8\%, g_1 = 7,1\%$$

$$f_2 = 3,7\%, g_2 = 7,1\%$$

$$f_3 = 6,7\%, g_3 = 7,1\%$$

Fig. 3.10.

Anvendte lineariseringer for Coulomb flydebetingelse ( $f = \Delta R/R_0$ ,  $g = \Delta \tau/R_0$ )

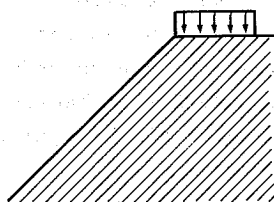
inddeling. Linearisering LIN = 3 giver en fejl  $\Delta R/R_0$  på 3,4%, medens  $\Delta \tau/R_0$  for LIN = 4 bliver 7,1%. Disse fejl vil ved praktiske beregninger fuldt ud være tilstrækkelig små, på grund af den usikkerhed hvormed materialekonstanterne kan bestemmes.

Udledelsen af de angivne lineariseringer fremgår i øvrigt af appendix 2.

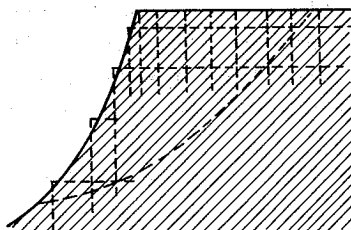
Sluttelig skal bemærkes, at en udvendig linearisering af flydebetingelsen kan bestemmes ved blot at vælge en passende stor  $\phi$ -værdi i forhold til den aktuelle friktionsvinkel  $\phi$ .

### 3.3 Andre geotekniske anvendelser af de numeriske optimeringsmetoder

I det foregående er bæreevnebestemmelse for stribefundamenter på halvuendeligt jordlegeme behandlet. Imidlertid kan de numeriske optimeringsmetoder også tænkes anvendt ved andre geotekniske problemer, hvor der kan regnes med plan deformationstilstand. Beregning af bæreevnen for de på fig. 3.11 viste problemer forløber principielt helt som angivet i afsnit 3.2. Der må dog ved DILI-metoden (spændingsfunktionsmetoden) anvendes en ret fin netinddeling for at kunne tage hensyn til den skrånende side, eller der må benyttes en trekantformet netinddeling - se f.eks. [SOA, 1967].



Fundament



Skråningsstabilitet

Fig. 3.11. Nogle geotekniske problemer med plan deformationstilstand

Ved 3-dimensionale geotekniske problemer kan fremgangsmåden principielt også anvendes, men da der fås langt flere variable og restriktioner end ved plane tilfælde, synes metoderne ikke på nuværende tidspunkt praktisk anvendelige.

#### 4. STRIBEFUNDAMENT-EKSEMPLER

Af de betragtede eksempler fremgår, at ELLI-metoden ikke synes særlig velegnet ved en automatisk, numerisk bæreevnebestemmelse. Til gengæld synes DILI-metoden meget velegnet, idet den ved beregninger i eks. 1 og 2, hvor det er muligt at sammenligne med eksakte løsninger, giver løsninger, der afviger med mindre end 5%. Dette må siges at være fuldt tilstrækkeligt, når der tages hensyn til usikkerhed ved bestemmelse af materialeparametre. Også ved eks. 3 ( $\gamma \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $\phi \neq 0$ ), hvor forskellige tilnærmelsesløsninger kendes, fås små afvigelser fra disse. Med hensyn til eks. 4, der drejer sig om bestemmelse af  $N_Y$ , fås større vanskeligheder, da optimeringsproblemet bliver mere følsomt. For variabel belastning bestemmes imidlertid løsninger med moderat spredning. Disse løsninger stemmer også ganske godt overens med andre løsninger, men der bør dog foretages flere beregninger for at kunne bestemme  $N_Y$ 's variation korrekt.

Ved de foretagne beregninger er der overalt regnet med konstante materialeparametre. En væsentlig fordel ved den her udviklede metode er imidlertid, at disse parametre kan varieres fra sted til sted i jordlegemet. Foretages samtidig en udvidelse af den her benyttede variant af DILI-metoden, så der kan anvendes en ikke-ækvidistant netinddeling, fås mulighed for at medtage en større del af jordlegemet uden fordyrelse af edb-beregningerne.

Ved alle eksempler benyttes dimensionsløse enheder; i eks. 1 og 2 bevirker længdeenheden m og kraftenheden  $M_p$  ( $= 10 \text{ MN}$ ) dog en vis overensstemmelse med forholdene ved ler.

#### 4.1 Stribefundament på halvindeligt jordlegeme

##### 4.1.1 Eksempler

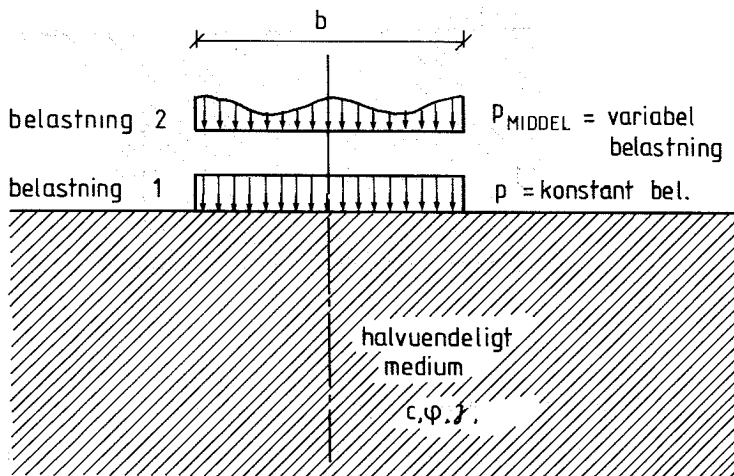
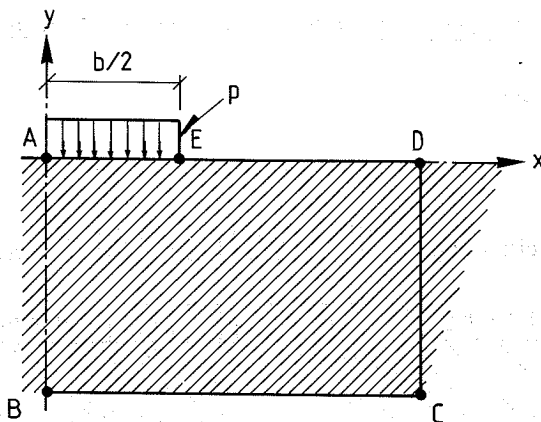


Fig. 4.1. Stribefundament på halv-  
uendeligt jordlegeme

Den geometriske opbygning af de betragtede eksempler fremgår af fig. 4.1.

Bæreevnen for et stribefundament med bredden  $b$  ønskes bestemt, idet jordlegemet er karakteriseret ved størrelserne  $c$ ,  $\phi$  og  $\gamma$ .

Ved de numeriske beregninger udskæres en del af det halvuendelige medium. Da bæreevnen er bestemt ud fra den tilladelige spændingstilstand i fundamentets umiddelbare nærhed, er det tilstrækkeligt at udtage en mindre del af området. Dette fremgår også ved sammenligning af nogle af de numeriske eksempler. For den udtagne del fastlægges randbetingelserne som angivet på fig. 4.2, idet systemets symmetri udnyttes.



- RAND AB: - symmetri  $\Rightarrow \tau_{xy} = 0, \sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0$
- " BC: indspændt rand  $\Rightarrow \sigma_x \neq 0, \tau_{xy} \neq 0, \sigma_y \neq 0$
- " CD: kun vandrette spændinger svarende til volumenkræfter indsat i flydebet.  $\Rightarrow \tau_{xy} = 0, \sigma_x \sim \text{fkt.}(\sigma_y), \sigma_y = \gamma y$
- " AD: fri rand  $\Rightarrow \tau_{xy} = 0, \sigma_y = 0$

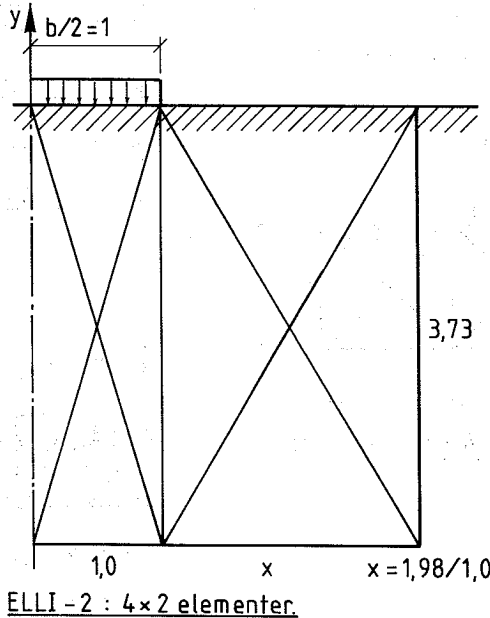
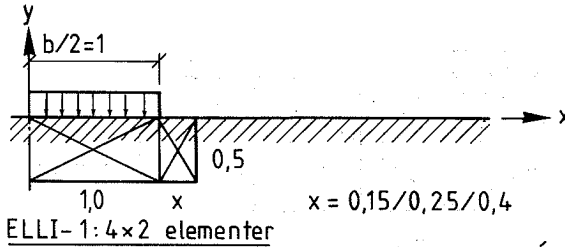
Fig. 4.2. Udskåren del ABCD og randbetingelser

De angivne randbetingelser er normalt på den sikre side, men langs BC kan fås randforstyrrelser, hvis der ikke kræves  $\sigma_x \leq 0$  og  $\sigma_y \leq 0$ .

Belastningerne '1' og '2' gengiver henholdsvis en jævnt fordelt belastning og en variabel, som illustreret i fig. 4.1.

#### 4.1.2 Ligevægts-elementmetode eksempler (ELLI)

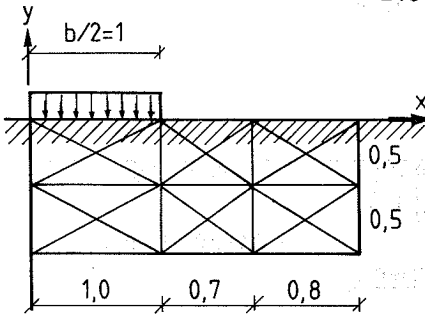
Ved beregningerne benyttes de numeriske eksempler ELLI-1 til ELLI-13. Randbetingelserne fremgår af fig. 4.2, idet der dog regnes med indspænding ved rand CD. Elementinddelingen er vist på fig. 4.3a-4.3c. Der benyttes kun 'belastning 1'.



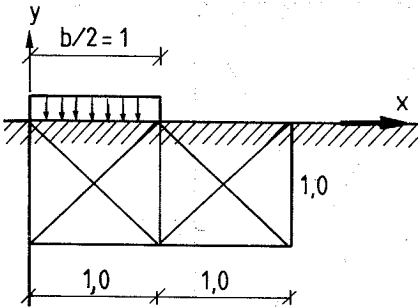
Udregnet ud fra optimale  
bæreevne for (4,1), når  
 $x = 1,98$

Fig. 4.3a. ELLI-eksempler

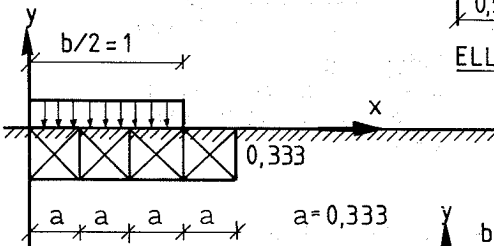
Det fremgår af fig. 4.3, at der ved nogle af eksemplerne kun medtages et meget lille udsnit af det bærende jordlegeme. Det fremgår dog af de udførte beregninger, at dette ikke er af nævneværdig betydning, idet bæreevnen først og fremmest er afhængig af spændingsoptagelsen umiddelbart under fundamentet, og især er forholdene ved punkt E på fig. 4.2 afgørende. Dette stemmer også overens med, hvad Lysmer [LYS, 1970] har erfaret vedr. bæreevneløsninger.



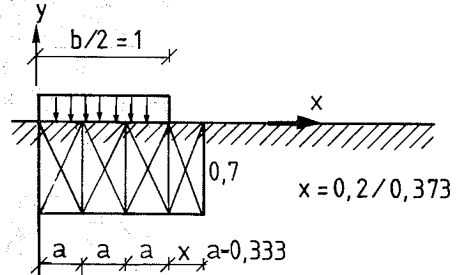
ELLI-3: 4x6 elementer



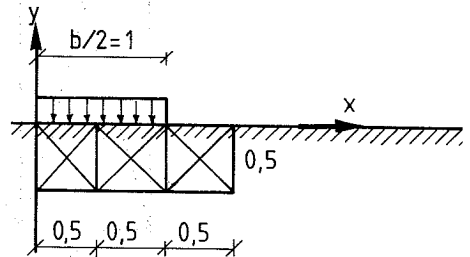
ELLI-5: 4x2 elementer



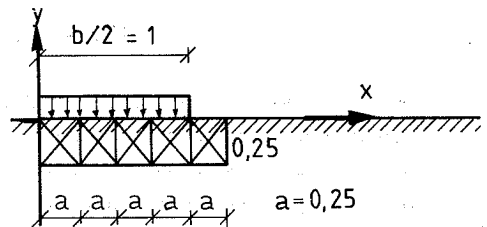
ELLI-7: 4x4 elementer



ELLI-4: 4x4 elementer



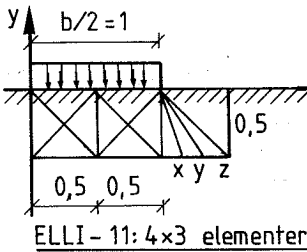
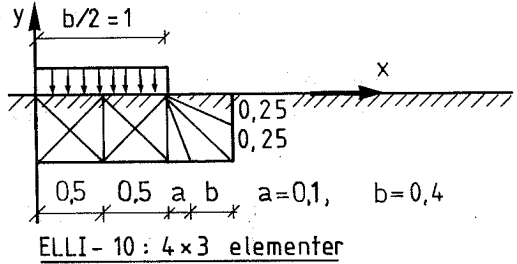
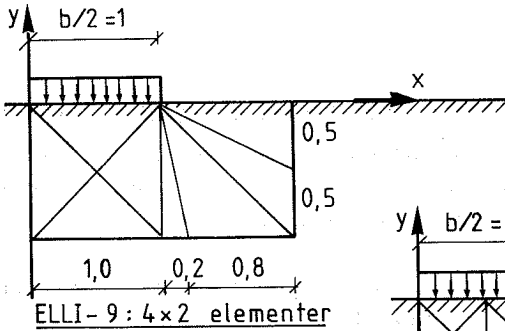
ELLI-6: 4x3 elementer



ELLI-8: 4x5 elementer

Fig. 4.3b. ELLI-eksempler





$$\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

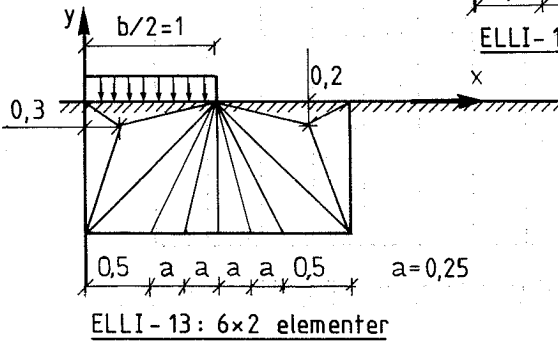
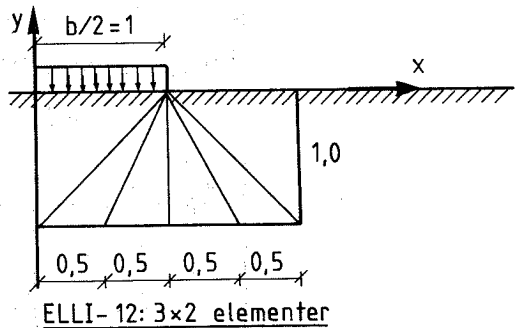
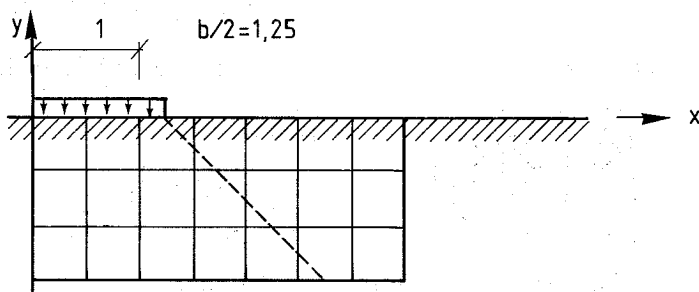


Fig. 4.3c. ELLI-eksempler

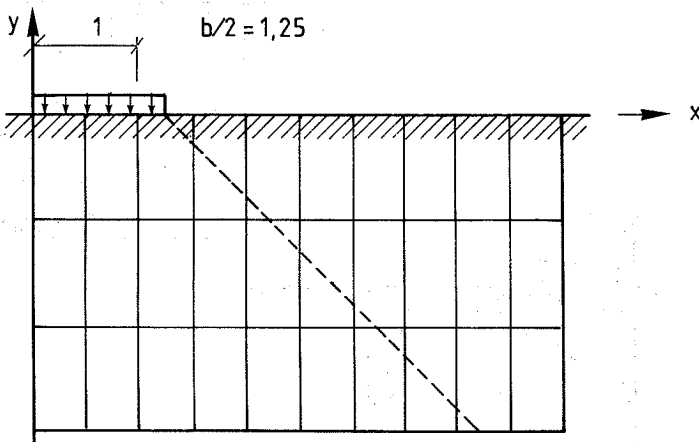
#### 4.1.3. Spændingsfunktions-differensmetode eksempler (DILI)

Ved beregningerne benyttes de numeriske eksempler DILI-1 til DILI-9. Randbetingelserne fremgår af fig. 4.1. Netinddeling m.m. for DILI-eksemplerne fremgår af fig. 4.4a-4.4c.

Såvel belastningstilfælde '1' som '2' undersøges, idet belastningen tilnærmes som vist på fig. 4.4.

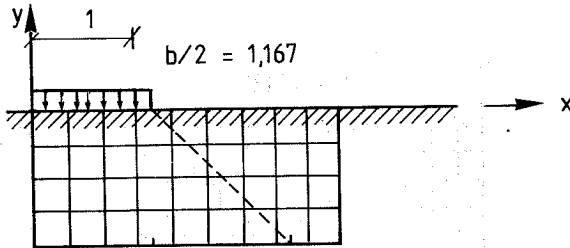


DILI - 1 : kvadratisk net :  $0,5 \times 0,5$ , 4x8 knuder

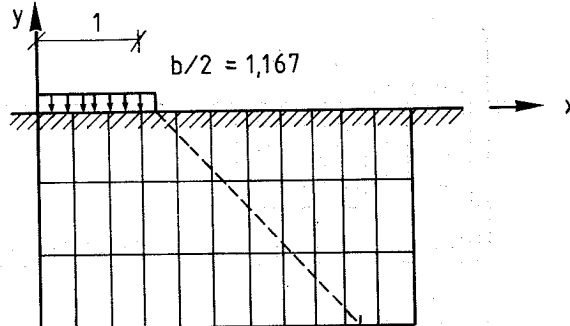


DILI - 2 : rektangulært net :  $0,5 \times 10$ , 4x11 knuder

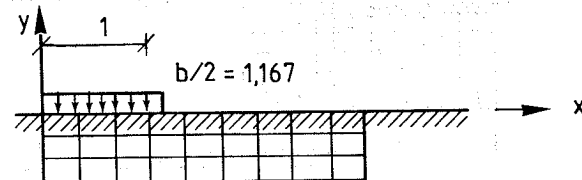
Fig. 4.4a. DILI eksempler



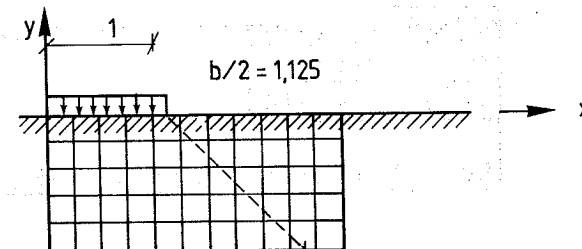
DILI- 3: kvadratisk net :  $0,334 \times 0,334$  ,  $5 \times 10$  knuder



DILI- 4: rektangulært net :  $0,334 \times 0,667$  ,  $4 \times 12$  knuder



DILI- 5: rektangulært net :  $0,334 \times 0,167$  ,  $4 \times 10$  knuder



DILI- 6: kvadratisk net :  $0,25 \times 0,25$  ,  $6 \times 12$  knuder

Fig. 4.4b. DILI eksempler

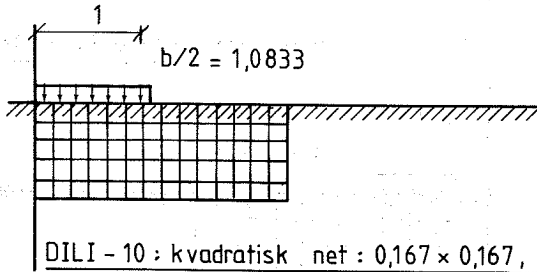
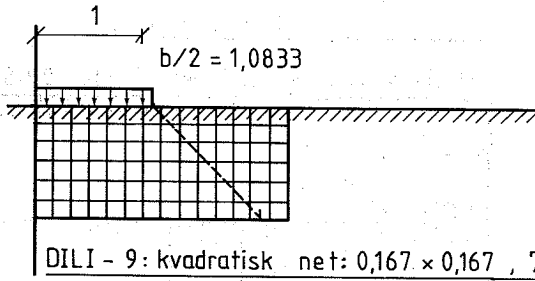
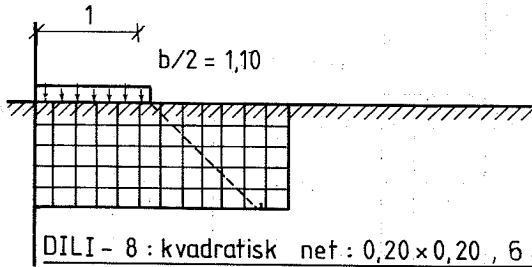
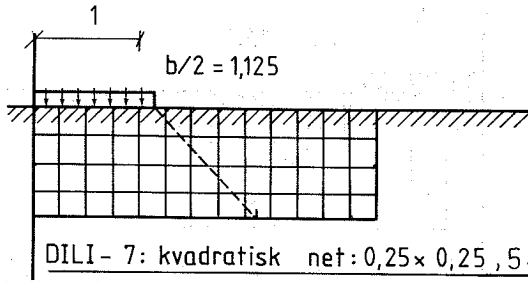


Fig. 4.4c. DILI eksempler

#### 4.2 Eksempel 1: Stribefundamenters bæreevne på vægtløs jord ( $\gamma = 0$ , $\varphi \neq 0$ , $c \neq 0$ )

Et problem, som det på fig. 4.5 skitserede, behandles, idet det vægtløse jordlegeme regnes at bestå af et kombineret kohæsions- og friktionsmateriale ( $c = 2.38$ ,  $\varphi = 20^\circ$ ). Coulomb's flydebetingelse benyttes.

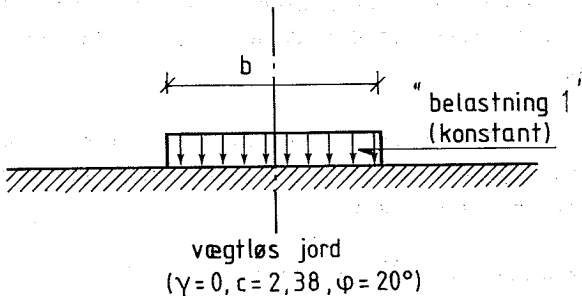


Fig. 4.5. Stribefundament på vægtløs jord

Til dette problem eksisterer en del plasticitetsteoretiske løsninger. Først skal dog nævnes, at bæreevnen iflg. formel (1.1) bliver  $p = 35.46$ , idet der jf. [FUN, 1977] benyttes  $N_c = 14.8$ .

Hos Chen [CHE, 1975] er angivet visse kendte øvre- og nedreværdiløsninger. Nogle af disse er kort omtalt i det følgende.

##### Nedreværdiløsninger:

Benyttes en statisk tilladelig snitkraftfordeling, som angivet på fig. 4.6, fås følgende løsning

$$p = Q + R, \text{ hvor} \quad (4.1)$$

$$R = 2c \operatorname{tg} \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right)$$

$$Q = \frac{1}{2} c \operatorname{tg}^3 \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right).$$

$$[4 + \sin \varphi + \sin^2 \varphi + (1 + \sin \varphi) (4 + \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}]$$

R er her det maksimalt tilladelige énaksede tryk, medens kraften P i stringerretningen bestemmes ud fra Coulomb's flydebetingelse og kraften R. I det aktuelle tilfælde fås løsningen  $p = 30.84$ .

Benyttes i stedet en statisk tilladelig snitkraftfordeling som angivet på fig. 4.7, hvor der benyttes uendelig mange stringere, kan bæreevnen udledes som

$$p = c \cot \varphi [e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right) - 1] \quad (4.2)$$

Her fås i det aktuelle tilfælde bæreevnen  $p = 35.31$ .

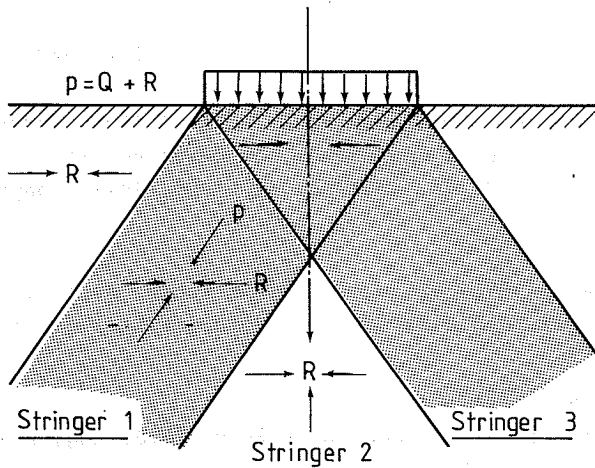


Fig. 4.6. 3 trykstringere

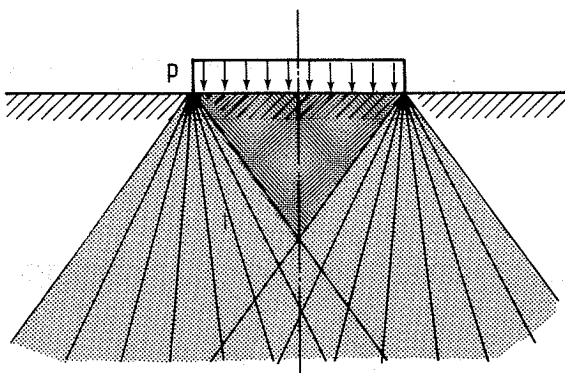


Fig. 4.7. Mange trykstringere

#### Øvre værdiløsninger

Med en brudfigur, som den på figur 4.8 viste, dvs. en såkaldt Hill-brudmekanisme, fås følgende bæreevne:

$$p = c \cot \varphi \left[ e^{\pi \tan \varphi} \tan^2 \left( \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varphi \right) - 1 \right] \quad (4.3)$$

Dette udtryk er lig med nedreværdiløsningen (4.2), hvorfor der er tale om en eksakt løsning.

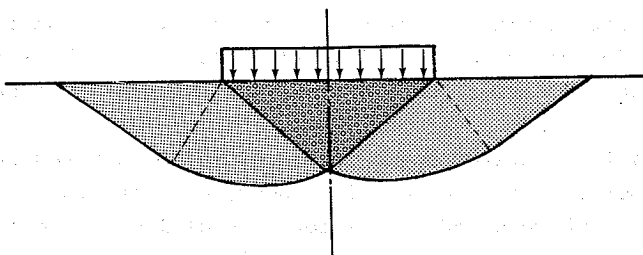


Fig. 4.8. Hill-mekanisme

Samme udtryk fås også ved anvendelse af brudfiguren på fig. 4.9. Denne mekanisme er en Prandtl-brudmekanisme.

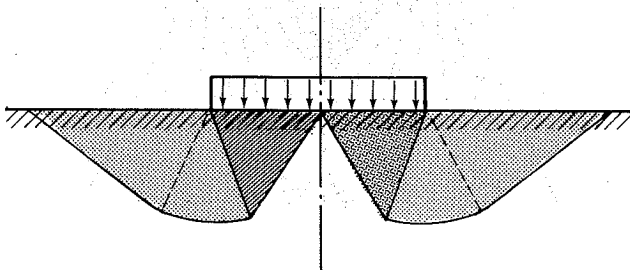


Fig. 4.9. Prandtl-mekanisme

I tabel 4.1 og på fig. 4.10 er angivet nogle løsninger fundet ved ELLI-beregninger. Det ses, at resultaterne gennemgående er ret dårlige og kan give ned til ca. 60% af den teoretiske bæreevne. Af ELLI 5-8 og ELLI 9-10 fremgår, at bæreevnen er uafhængig af elementstørrelsen. Af ELLI 6, 10, 11 fremgår, at elementinddelingen umiddelbart til højre for den belastede del er af stor betydning for bæreevnen. Tilsvarende viser ELLI 12-13, at elementinddelingen under den belastede del også er afgørende. Det gælder således, at kun når der er mulighed for, at trykstringerne kan komme relativt frit op til pkt. E (se fig. 4.2), fås rimelige løsninger. Dette krav gør det vanskeligt at indlægge en fornuftig generel elementinddeling, især hvis forholdene ønskes undersøgt længere væk fra fundamentet end her.

I tabel 4.2 er angivet nogle løsninger ved DILI-beregninger. Disse viser til gengæld gode løsninger, der for  $LIN = 3$  ikke giver udsving på mere end ca. 5% for forskellige netinddelinger. Selv ved meget grove netinddelinger fås en god bæreevnebestemmelse, dog kan der fås bæreevner lidt større end de teoretiske på grund af lokale ligevægtsforhold. Det fremgår, at netinddelingen kan vælges generelt uden hensyntagen til snitkraftinddelingen - se også fig. 4.11. Samtidigt er beregningerne relativt billige selv for større netinddelinger.



edb. eks.	edb behov $10^{-4}$ MP <sup>+</sup> )	LIN	b	teoretisk bæreevne iflg. (4.2) $P_{teor.}$	teoretisk bæreevne iflg. (1.1)	benyttet bæreevne iflg. ELLI p	$p/P_{teor.}$
ELLI-1a x=0.15		2	2.00	35.31	35.22	20.7	0.57
ELLI-1b x=0.25		1	-	-	-	20.7	0.59
		2				22.0	0.62
		3				23.3	0.66
ELLI-1c x=0.4		2	-	-	-	23.8	0.67
ELLI-2a x=1.98		2	-	-	-	29.5	0.84
		3				29.5	0.84
ELLI-2b x=1.0		2	-	-	-	25.7	0.73
ELLI-3	275	1	-	-	-	20.7	0.59
	430	2				20.7	0.59
	530	3				22.2	0.63
ELLI-4a x=0.2		2	-	-	-	27.8	0.79
ELLI-4b x=0.37		3	-	-	-	30.6	0.87
ELLI-5	110	2	-	-	-	24.7	0.70
ELLI-6	190	2	-	-	-	24.7	0.70
ELLI-7	225	2	-	-	-	24.7	0.70
ELLI-8	250	2	-	-	-	24.7	0.70
ELLI-9	110	1	-	-	-	20.7	0.59
	135	2				26.0	0.74
	150	3				26.9	0.76
ELLI-10	150	1	-	-	-	20.7	0.59
	190	2				26.0	0.74
	230	3				26.9	0.76
ELLI-11a x/y=0.1/0.2	150	2	-	-	-	28.2	0.80
ELLI-11b x/y=0.3/0.1	150	2	-	-	-	28.2	0.80
ELLI-11c x,y=0.2/0.2	150	2	-	-	-	28.2	0.80
ELLI-12	150	3	-	-	-	32.3	0.92
ELLI-13	130	1	-	-	-	28.3	0.80
	160	2				31.9	0.90
	190	3				33.8	0.96

+) NEUCC-betalingsenhed: 1 MP = 1 maskinpoint

Tabel 4.1. Bæreevne ved eksempel 1, ELLI-eksempler.

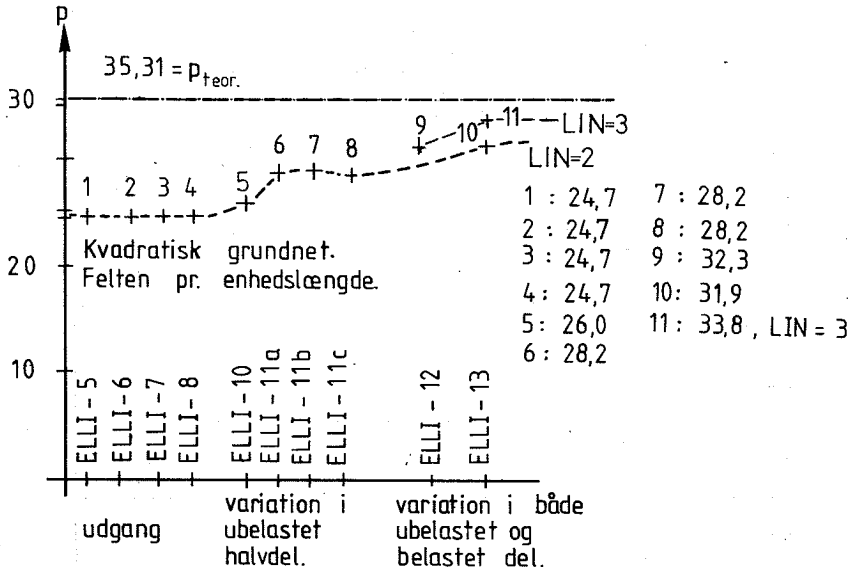


Fig. 4.10. Bæreevne ved eksempel 1,  
ELLI-eksempler

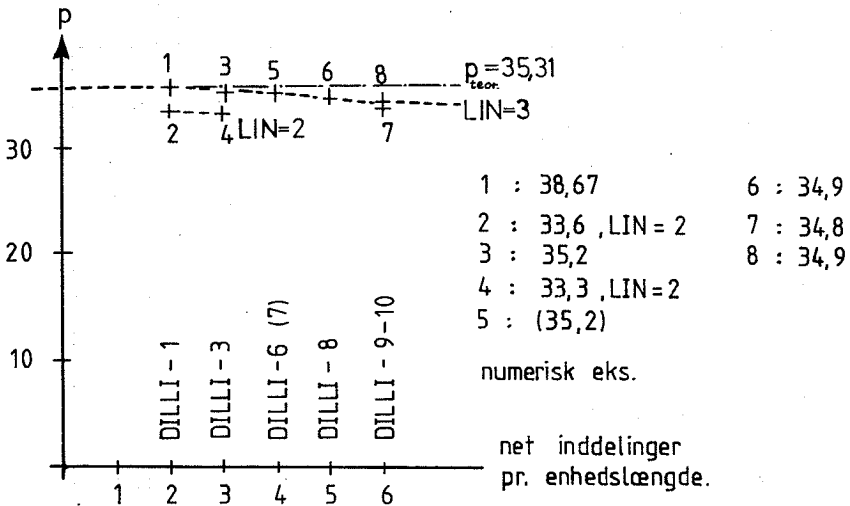


Fig. 4.11. Bæreevne ved eksempel 1,  
DILLI-eksempler

edb eks.	edb behov $\times 10^{-4}$ MP	LIN	b	teoretisk bæreevne iflg. (4.2) $P_{\text{teor}}$	teoretisk bæreevne iflg. (1.1)	beregnet bæreevne iflg. DILI $P$	$P/P_{\text{teor.}}$
DILI-1	85 104 123	1 2 3	2.50	35,31	35,22	28.52 33.58 35.67	0.81 0.95 1.01
DILI-2	157	3	2.50	-	-	35.36	1.00
DILI-3	130 168 196	1 2 3	2.33	-	-	27.09 33.33 35.19	0.77 0.94 1.00
DILI-4	165	3	2.33	-	-	34.77	0.98
DILI-5	190	3	2.33	-	-	35.36	1.00
DILI-6	192 234 382	1 2 3	2.25	-	-	26.58 33.20 34.91	0.75 0.94 0.99
DILI-7	209 273	2 3	2.25	-	-	34.55 35.20	0.98 1.00
DILI-8	470	3	2.20	-	-	34.91	0.99
DILI-9	1053 1001	3 4	2.17	-	-	34.77 34.65	0.98 0.98
DILI-10	671	3	2.17	-	-	34.92	0.99

LIN=3

DILI-1 i=2	DILI-3 i=3	DILI-6 DILI-7 i=4	DILI-8 i=5	DILI-9 DILI-10 i=6	endelig løsning (LIN=3)
35.67 $\Delta=0.48$	35.19 $\Delta=0.14$	34.91 35.20 ↓ 35.05 $\Delta=0.14$	34.91 $\Delta=0.06$	34.77 34.92 ↓ 34.85	34.80  $\frac{35.31-34.80}{35.31}$ = 1.4%

Tabel 4.2. Bæreevne ved eksempel 1, DILI-eksempler.

Nederst i tabel 4.2 er nogle løsninger for voksende antal inddelinger ( $i$ ) indenfor fundamentsfladen vist. Idet der benyttes  $p^{i+1} = p^i - \Delta^i$  fremgår, at differensen  $\Delta^i$  omtrent synes at blive halveret, hver gang antallet af inddelinger øges med 1. På dette grundlag er udregnet en endelig DILI-løsning. Bidrag mindre end 0.01 er regnet negligeble.

Konklusionen af dette eksempel er altså, at der opnås særdeles tilfredsstillende resultater v.h.a. DILI-metoden. Til gengæld fås meget dårlige resultater ved anvendelse af ELLI-metoden, medmindre ret specielle elementinddelinger vælges.

#### 4.3 Eksempel 2: Stribefundamenters bæreevne på vægtløs og friktionsløs jord ( $\gamma = 0$ , $\varphi = 0$ , $c \neq 0$ )

Det på fig. 4.12 viste eksempel behandles, idet jordmaterialet regnes at være vægtløst og friktionsløst ( $\gamma = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $c = 2.38$ )

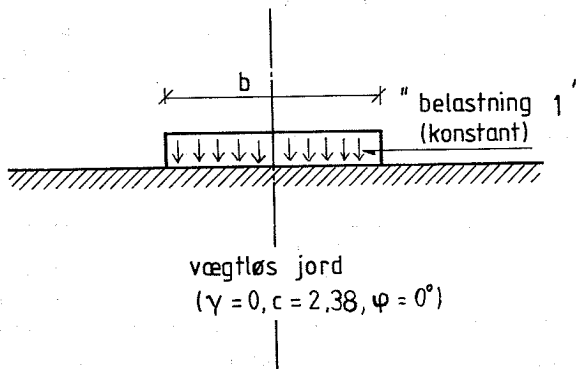


Fig. 4.12 Stribefundament på vægtløs og friktionsløs jord.

Løsningerne fra eks. 1 er naturligvis også gældende for dette

eksempel, når  $\phi = 0$  indsættes, herved fås  $p = 12.5$ . Som angivet i [CHE, 1975] kan analytiske løsninger lettere bestemmes for dette tilfælde, hvor Tresca's flydebetingelse gælder. En simpel løsning med 3 zoner, og hovedspændingsretninger efter x- og y-aksen giver således  $p = 4 \cdot c = 9.52$  - jf. f. eks. [N m.fl., 1970]

En enkelt ELLI-løsning er angivet i tabel 4.3. Den fundne løsning er lidt bedre end for det foregående eksempel, men betydelig dårligere end for DILI-eksemplerne, der er angivet i samme tabel, samt på fig. 4.13. P.g.a. lineariseringssimplifikationen benyttes en lille friktionsvinkel  $\phi \neq 0$ . Der anvendes  $\phi = 0.5^\circ$ .

edb eks.	edb behov $\times 10 \text{ MPa}$	LIN	b	teoretisk bæreevne iflg. (4.2) $p_{\text{teor}}^{+}$	teoretisk bæreevne iflg. (1.1) $^{+}$	beregnet bæreevne iflg. edb $p^{+}$	$p/p_{\text{teor}}$
ELLI-3	430	2	2.00	12.5	12.51	9.69	0.78
DILI-1	95	1	2.50	-	-	11.12	0.89
	105	2				12.15	0.98
	120	3				12.41	0.99
DILI-2	167	3	2.50	-	-	12.80	1.02
DILI-3	121	1	2.33	-	-	11.12	0.89
	123	2				12.27	0.98
	183	3				12.34	0.99
DILI-6	227	2	2.25	-	-	12.21	0.98
	269	3				12.38	0.99
DILI-8	381	3	2.25	-	-	12.47	1.00
DILI-9	782	3	2.20	-	-	12.45	1.00

$^{+}) \phi = 0.5^\circ \sim 0$  afvigelse  $\frac{12.51 - 12.45}{12.51} \cdot 100\% = 0.5\%$

Tabel 4.3 Bæreevne ved eksempel 2.

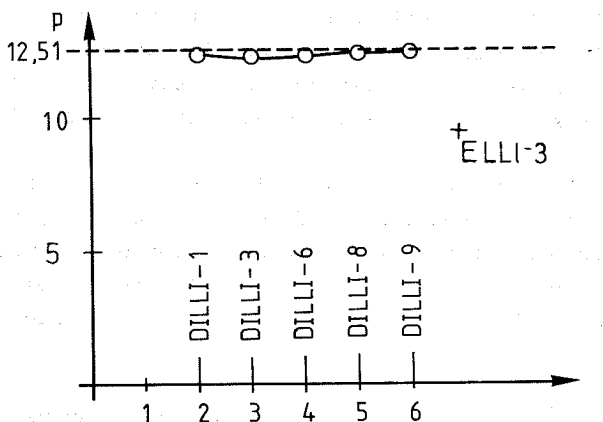


Fig. 4.13 Bæreevne ved eksempel 2.

Konklusionen for disse beregninger er ganske analog til eks. 1, blot giver ELLI-metoden lidt bedre resultater end ved det foregående eksempel, hvilket dog bør sammenholdes med den nævnte simple løsning.

#### 4.4 Eksempel 3: Stribefundamenters bæreevne på jord ( $\gamma \neq 0$ , $\varphi \neq 0$ , $c \neq 0$ )

Hidtil er der kun blevet benyttet konstant fundamentsbelastning, da de foregående tilfælde ( $\gamma = 0$ ) har kunnet sammenlignes med eksakte plasticitetsteoretiske løsninger. For problemet, der er vist på fig. 4.14, eksisterer imidlertid ikke eksakte løsninger. Hos Chen [CHE, 1975] er angivet minimerede øvre værdiløsninger, ligesom andre tilnærmelsesløsninger er givet af Cox [COX, 1962] og Spencer [SPE, 1962]. Ved disse løsninger er belastningen regnet variabel, spec. lineær-variabel. Derfor benyttes såvel 'belastning 1' (konstant) som 'belastning 2' (variabel) ved de efterfølgende beregninger. I sidstnævnte tilfælde regnes alle belastningsparametrene i knudepunkterne under fundamentet for variable. Iøvrigt benyttes kun DILLI-beregninger.

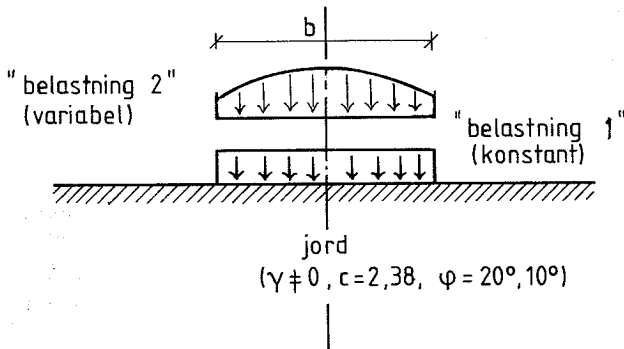


Fig. 4.14 Stribefundament på jord.

I tabel 4.4 og på fig. 4.15 er angivet løsninger for  $\varphi = 20^\circ$  og  $G = 0, 1.0, 10.0$ , hvor  $G = (\gamma \cdot b/2)/c$ . 'Belastning 2' benyttes bortset fra  $G = 0$ , hvor 'belastning 1'-løsninger er angivet i parentes. Der benyttes kun linearisering  $LIN = 3$ .

For  $G = 10.0$  ses at fejlen, ligesom i eksempel 1, synes at blive halveret, hver gang antallet af inddelinger under fundamentet forøges med 1. På dette grundlag er i sidste kolonne udregnet en endelig løsning for  $LIN = 3$ . Det fremgår af dette, at de enkelte DILI-løsninger ligger meget nær de, der er bestemt af Cox, Spencer og Chen. Iøvrigt skal bemærkes, at Cox [COX, 1962] bestemmer løsningerne ved numeriske sliplinieberegninger, og at Spencer [SPE, 1962] bestemmer dem ved anvendelse af en perturbationsmetode med udgangspunkt i et vægtløs jordlegeme.

G	Andre tilnærmelses- metoder	DILI-1 2 indd.	DILI-3 3 indd.	DILI-6 4 indd.	DILI-8 5 indd.	DILI-9 6 indd.	endel løsn. (LIN=
0.0	Cox 35.2 Spencer 35.2 Chen 35.2	35.67 $\Delta = 0.16$ (35.64)	35.51 $\Delta = 0.36$ (35.2)	<u>35.15</u> (34.9)	35.44 *	35.53 *	35.1 -0.1 -0.0 -0.0 -0.0 -0.0 <u>34.7</u>
1.0	Cox 42.6 Spencer 43.6 Chen 43.1	44.15 $\Delta = 1.59$	42.56 $\Delta = 0.44$	<u>42.12</u>	42.33 * (eks. med 6 y- indd. giver 42.17)	43.17 *	42.1 -0.2 -0.1 -0.0 -0.0 -0.0 <u>41.6</u>
10.0	Cox 89.9 Spencer % Chen 103.3	101.86 $\Delta = 7.24$	94.62 $\Delta = 3.68$	90.94 $\Delta = 1.42$	89.52 $\Delta = 0.74$	<u>88.78</u> 90.18 <sup>+</sup> )	88.7 -0.3 -0.1 -0.0 -0.0 -0.0 <u>88.0</u>

$$G = (\gamma \cdot b/2)/c$$

$$c = 2.38$$

\* angiver løsninger, hvor der har været benyttet et område, der i y-retningen har været for kort til bestemmelse af en korrekt værdi. Herved er blevet introduceret kraftkomponenter, der ikke kan optages under det betragtede område. Disse fejl introduceres vanskeliggere når belastning 1 benyttes.

+) )

$$c' = 2.46 \sim \text{ydre linearisering af flydebet. (LIN = 3)}$$

Tabel 4.4 Bæreevne ved eksempel 1, når LIN = 3,  $\gamma = 20^\circ$   
G = 0, 1.0 og 10.0, samt belastning 2', (1')



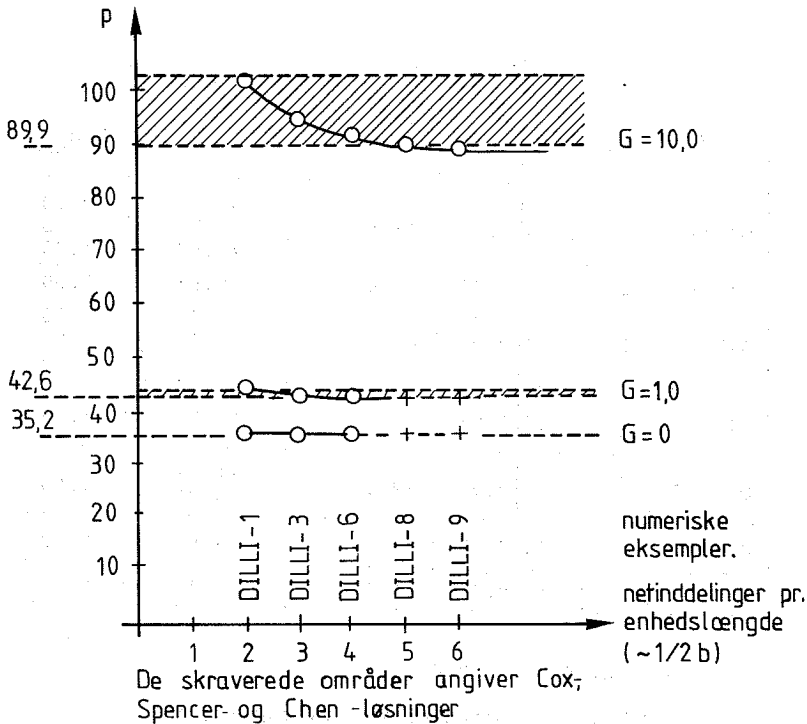


Fig. 4.15 Bæreevne ved eksempel 3, når  $LIN=3$ ,  $G = 0, 1.0$  og  $10.0$  samt 'belastning 1'.

Endelig benytter Chen & Davidson [C & D, 1973], [CHE, 1975] numerisk minimering af nogle øvre værdiløsninger.

Ved de resultater, der er angivet med \*, fås for store bæreevner, da det medtagne område har været for lille. Disse resultater er derfor ikke medregnet ved bestemmelse af den endelige løsning. Ønskes bæreevnebestemmelse ved disse differensnetinddelinger, må der derfor medtages et større område.

edb eks.	LIN	b	$G = \frac{\gamma \cdot b/2}{c}$	bæreevne iflg. Cox $P_{Cox}$	beregnet bæreevne iflg.DILI p	$p/P_{LIN} = 3$
DILI-1	1	2.50	1.05	43.0	34.76	0.83
	2				39.79	0.95
	3				42.04	1.00
DILI-2	3	2.50	1.05	43.0	45.91	1.00
DILI-3	1	2.33	0.98	42.5	30.40	0.75
	2				38.17	0.95
	3				40.37	1.00
DILI-6	2	2.25	0.95	42.2	37.28	1.00
	3				39.44	
DILI-7	3	2.25	0.95	42.2	39.43	1.00
	4				39.20	
DILI-8	3	2.20	0.92	42.0	38.87	1.00
DILI-9	3	2.17	0.91	41.9	38.46	1.00

$$c = 2.38 \quad \gamma = 2.0$$

Tabel 4.5 Bæreevne ved eksempel 3 for forskellige lineariseringer og  $G \sim 1$ , samt 'Belastning 1'.

Ligeledes er for  $\varphi = 20^\circ$  bestemt de i tabel 4.5 givne løsninger for forskellige lineariseringer, 'belastning 1' og  $G \sim 1$ . Det fremgår heraf, at LIN=1 synes at give betydelige mindre bæreevner end de LIN=3 og Cox-metoden giver. LIN=2 synes ganske god, men kun LIN=3 giver afvigelser på mindre end 10% af hvad Cox-metoden giver.

Ved sammenligninger mellem Cox-løsningen og DILI-3 løsningerne i tabel 4.4 og 4.5 for  $G \sim 1.0$  fremgår, at 'belastning 1' som ventet giver mindre bæreevne end 'belastning 2'. Som det fremgår af tabel 4.4, giver 'belastning 1' og '2' omtrent samme bæreevne for tilfældet  $G = 0$ .

Sluttelig er i tabel 4.6 vist løsninger for  $\varphi = 10^\circ$ ,  $LIN=3$ ,  $G = 0, 1.0$ , samt belastning 2. Disse beregninger udviser omtrent det samme som de foregående, omend der ikke sker nogen nedgang i  $\Delta$  for  $G = 1.0$ .

G	Andre tilnærmelsesmetoder	DILI-6	DILI-8	DILI-9
0.0	Cox 19.85	20.29	%	%
	Spencer 19.85			
	Chen 19.85			
1.0	Cox 21.47	21.96	21.79	21.61
	Spencer 21.59	$\Delta = 0.17 \Delta = 0.18$		
	Chen 21.54			

% = ikke beregnede eksempler

Tabel 4.6 Bæreevne ved eksempel 3, når  $LIN=3$ ,  $\varphi = 10^\circ$ ,  $G = 0, 1.0$  og belastning 2.

#### 4.5 Eksempel 4: Stribefundamenters bæreevne på kohæsionsløs jord ( $\gamma \neq 0$ , $\varphi \neq 0$ , $c = 0$ )

I modsætning til eksempel 3 regnes i det følgende med et kohæsionsløst jordmateriale. Som før benyttes  $LIN=3$ , og såvel 'belastning 1' som '2', som det fremgår af fig. 4.16. I fig. 4.16 er vist, at for  $\varphi = 10^\circ$  og  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$  er  $\Delta$  for eksempel 3 og 4. I tabel 4.6 er vist, at for  $\varphi = 10^\circ$  og  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$  er  $\Delta$  for eksempel 3 og 4. I tabel 4.6 er vist, at for  $\varphi = 10^\circ$  og  $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$  er  $\Delta$  for eksempel 3 og 4.

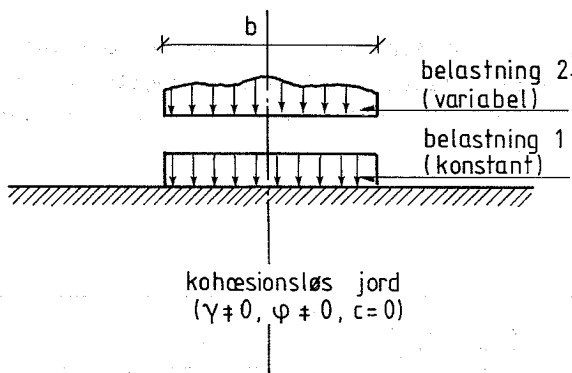


Fig. 4.16 Stribefundament på kohæsionsløs jord.

I afsnit 1 er nævnt, at bæreevnen for et fundament på jord kan bestemmes ved formel (1.1):  $p = 1/2 \cdot \gamma \cdot b \cdot N_\gamma + q \cdot N_q + c \cdot N_c$ . Udtrykket er som nævnt et tilnærmelsesudtryk, hvor parametrene  $N_\gamma$ ,  $N_q$  og  $N_c$  bestemmes ud fra simplere tilstande. Medens  $N_q$  og  $N_c$  kan bestemmes korrekt, hersker der stor usikkerhed m.h.t.  $N_\gamma$ . Dette fremgår dels af fig. 4.17 og dels af 4.18. Det har derfor stor betydning, at kunne bestemme mere korrekte  $N_\gamma$  værdier.

$N_\gamma$  bestemmes ud fra en kohæsionsløs jord, som vist på fig. 4.17, d.v.s. ganske det samme problem som her betragtet, når  $b$  og  $\gamma$  normeres ( $b = \gamma = 1$ ). Der betragtes her kun glatte fundamenter, d.v.s. kun lodrette spændinger ved fundamentsfladen.

I tabel 4.7 er forskellige resultater for DILI-eksempler angivet, når linearisering LIN=3 anvendes. Af tabellen samt fig. 4.19 fremgår, at der for  $c$  eksakt lig med 0 fås noget skiftende resultater. Dette skyldes, at det givne numeriske problem er overordentlig følsomt i optimeringsfasen, da blot en ganske minimal afvigelse fra 0 for en af parametrene kan betyde ganske meget

Parameter	Tilfælde	Resultat	Reference																																																	
$N_q$	Vægtløs og kohæsiionsløs jord $\gamma=0, c=0, q=1$	$N_q = e^{\pi \tan \varphi} \tan^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$	L.Prandtl 1920 [PRN, 1920]																																																	
$N_c$	Vægtløs og ubelastet jord. $\gamma=0, c=1, q=0$ -eks.1-	$N_c = (e^{\pi \tan \varphi} \tan^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) - 1) \cot \varphi$ $= (N_q - 1) \cot \varphi$	L.Prandtl 1920 [PRN, 1920]																																																	
$N_\gamma$	Kohæsiionsløs, ubelastet jord. $\gamma=1, c=0, q=0$ .	<table><tr><td><div><math>\varphi</math> Art</div></td><td>15°</td><td>20°</td><td>25°</td><td>30°</td><td>35°</td><td>40°</td></tr><tr><td>Ikke statistisk korrekt nedreværdi metode</td><td>1.8</td><td>4.8</td><td>10.7</td><td>22.9</td><td>48.4</td><td>116</td></tr><tr><td>Sliplinie-metode</td><td></td><td>2.8</td><td></td><td>14.8</td><td></td><td>85.6</td></tr><tr><td>Sliplinie-metode</td><td>1.4</td><td>3.2</td><td>6.9</td><td>15.3</td><td>35.2</td><td>86.5</td></tr><tr><td>Sliplinie-metode</td><td>0.7</td><td>1.6</td><td>3.5</td><td>7.5</td><td>18.0</td><td>42.0</td></tr><tr><td>Øvre værdi-metode for vægtløs legeme.</td><td>1.2</td><td>2.7</td><td>5.9</td><td>12.7</td><td>28.6</td><td>71.6</td></tr><tr><td>Tilnærmelses-metode ud fra de 2 første metoder.</td><td colspan="6"><math>N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \tan \varphi</math></td></tr></table>	<div><math>\varphi</math> Art</div>	15°	20°	25°	30°	35°	40°	Ikke statistisk korrekt nedreværdi metode	1.8	4.8	10.7	22.9	48.4	116	Sliplinie-metode		2.8		14.8		85.6	Sliplinie-metode	1.4	3.2	6.9	15.3	35.2	86.5	Sliplinie-metode	0.7	1.6	3.5	7.5	18.0	42.0	Øvre værdi-metode for vægtløs legeme.	1.2	2.7	5.9	12.7	28.6	71.6	Tilnærmelses-metode ud fra de 2 første metoder.	$N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \tan \varphi$						<div>G.G.Meyerhof 1948 [MEY, 1948]</div> <div>H.Lundgren* &amp; K.Mortensen 1953 [LU&amp;M, 1953]</div> <div>Sokolovski 1965 [SOK, 1965]</div> <div>B.Hansen &amp; N.H.Christensen. 1969 [H&amp;C, 1969]</div> <div>Chen &amp; Davidson 1973 [C&amp;D, 1973]</div> <div>Brinch Hansens tilnærmelses-metode 1961 [HA, B, 1961]</div>
<div><math>\varphi</math> Art</div>	15°	20°	25°	30°	35°	40°																																														
Ikke statistisk korrekt nedreværdi metode	1.8	4.8	10.7	22.9	48.4	116																																														
Sliplinie-metode		2.8		14.8		85.6																																														
Sliplinie-metode	1.4	3.2	6.9	15.3	35.2	86.5																																														
Sliplinie-metode	0.7	1.6	3.5	7.5	18.0	42.0																																														
Øvre værdi-metode for vægtløs legeme.	1.2	2.7	5.9	12.7	28.6	71.6																																														
Tilnærmelses-metode ud fra de 2 første metoder.	$N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \tan \varphi$																																																			
	-eks.4-																																																			

\* benyttes også i den danske funderingsnorm  
[FUN, 1977]

Fig. 4.17 Bæreevneparametrene  $N_q$ ,  $N_c$ ,  
og  $N_\gamma$ . (De fleste af løsninger-  
erne findes gengivet i [CHE, 1975])

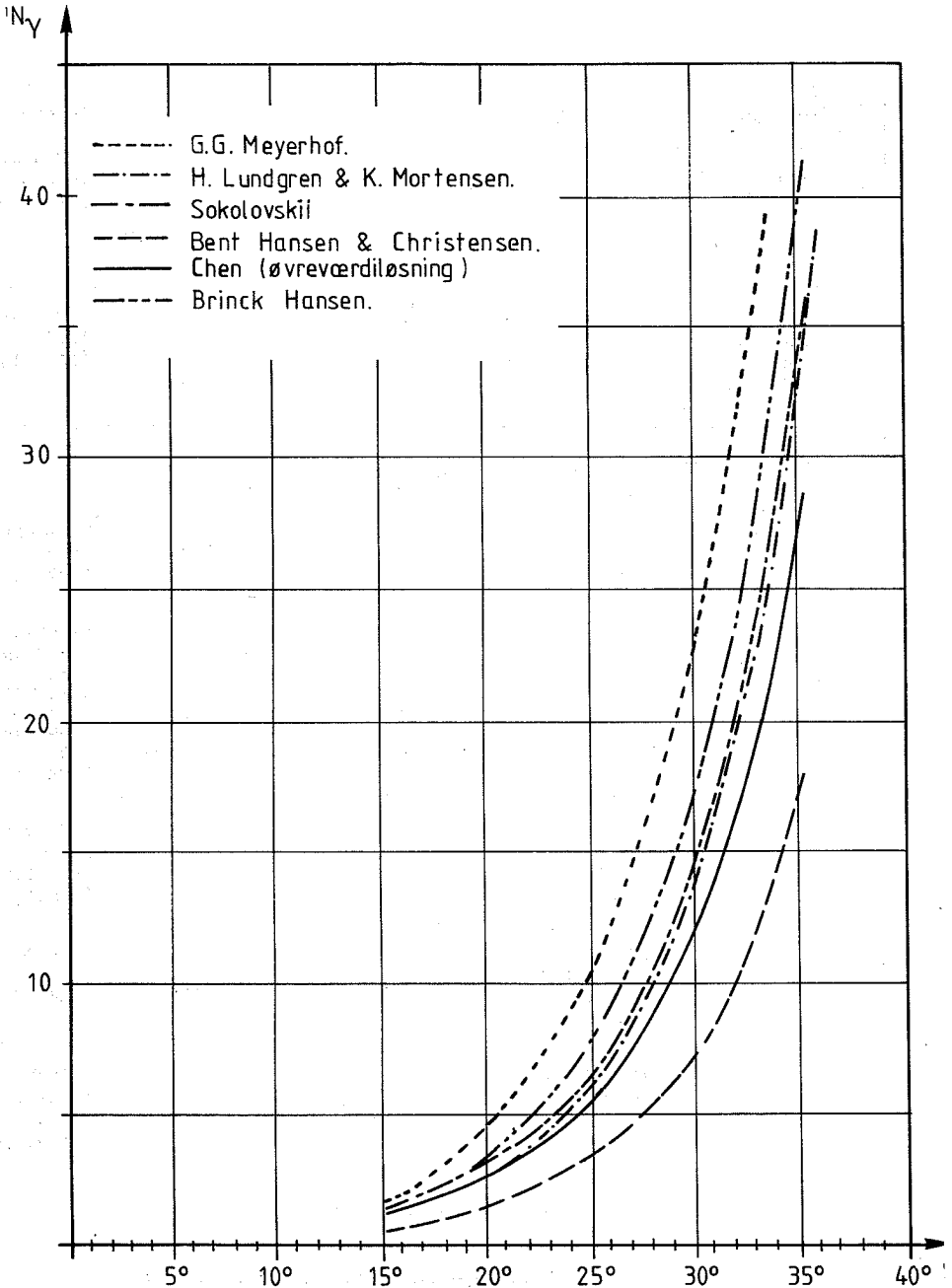


Fig. 4.18 Reference  $N_Y$ -værdier

edb eks.	edb behov $\times 10^{-4}$ MP	Belastning	b	$\varphi$	c	$\gamma$	$N_Y$
DILI - 1		bel. 1	2.50	5°	0	2.0	0.38
		-		10°	0	-	1.01
		-		15°	0	-	2.09
		-		20°	0	-	1.21/
		-					3.98
		-		25°	0	-	1.35
		-		30°	0	-	2.17
		-		35°	0	-	3.68
		-		40°	0	-	3.13
	130	bel. 2	2.50	10°	0	2.0	1.15
	132	-		20°	0		3.45
	124	-		30°	0		11.64
	116	bel. 1	2.50	10°	0.001	2.0	1.02
	122	-		15°	-	-	2.10
	125	-		15°	0.01	-	2.20
	238	-		20°	0.001	-	3.99
	122	-		25°	-	-	7.23
	120	-		25°	0.01	-	7.44
	131	-		30°	0.001	-	12.64
	150	-		35°	-	-	21.79
	137	-		35°	0.01	-	22.26
	126	bel. 2	2.50	10°	0.001	2.0	1.17
	132	-		15°	-	-	2.49
	126	-		20°	-	-	4.89
	128	-		25°	-	-	9.31
	123	-		30°	-	-	17.91
	124	-		35°	-	-	34.89
	238	bel. 1	2.50	20°	0.001	2.0	3.99
	134	-		20°	-	-	3.99
	136	-		20°	-	-	3.98

Tabel 4.7a Bæreevnebestemmelse  
ved eksempel 4.

edb eks.	edb behov 10 <sup>-4</sup> MP	Belastning	b	$\varphi$	c	$\gamma$	N <sub>y</sub>
DILI - 3	212	bel.2	2.33	10 <sup>0</sup>	0	2.0	0.94
	223	-		20 <sup>0</sup>	-	-	4.29
	188	-		30 <sup>0</sup>	-	-	17.16
	234	bel.1		10 <sup>0</sup>	0.001	2.0	0.73
	229	-		15 <sup>0</sup>	-	-	1.51
	403	-		20 <sup>0</sup>	-	-	2.86
	320	-		25 <sup>0</sup>	-	-	5.17
	276	-		30 <sup>0</sup>	-	-	9.05
	244	-		35 <sup>0</sup>	-	-	15.60
	193	bel.2	2.33	10 <sup>0</sup>	0.001	2.0	0.95
	225	-		15 <sup>0</sup>	-	-	2.10
	242	-		20 <sup>0</sup>	-	-	4.30
	230	-		25 <sup>0</sup>	-	-	8.65
	235	-		30 <sup>0</sup>	-	-	16.95 <sup>1)</sup>
	256	-		35 <sup>0</sup>	-	-	(24.30 <sup>1)</sup> )
	186	-		35 <sup>0</sup>	-	-	35.67 <sup>2)</sup>
DILI - 6	>858	bel.1	2.25	10 <sup>0</sup>	0.001	2.0	≤0.57
	434	-		20 <sup>0</sup>	-	-	2.23
	>897	bel.2	2.25	20 <sup>0</sup>	0.001	2.0	≤4.02
DILI - 8	811	bel.1	2.10	20 <sup>0</sup>	0.001	2.0	1.83
	488	bel.2	2.10	20 <sup>0</sup>	0	2.0	3.68
	>428	-		20 <sup>0</sup>	0.001	-	≤3.78

1) For kort i x-retning (iflg.  $\tau_{xy}$  - udskrift)

2) Ny elementindd. med 3 inddelinger i y-retningen og 11 i x-retningen.

Tabel 4.7b Bæreevnebestemmelse ved eksempel 4.



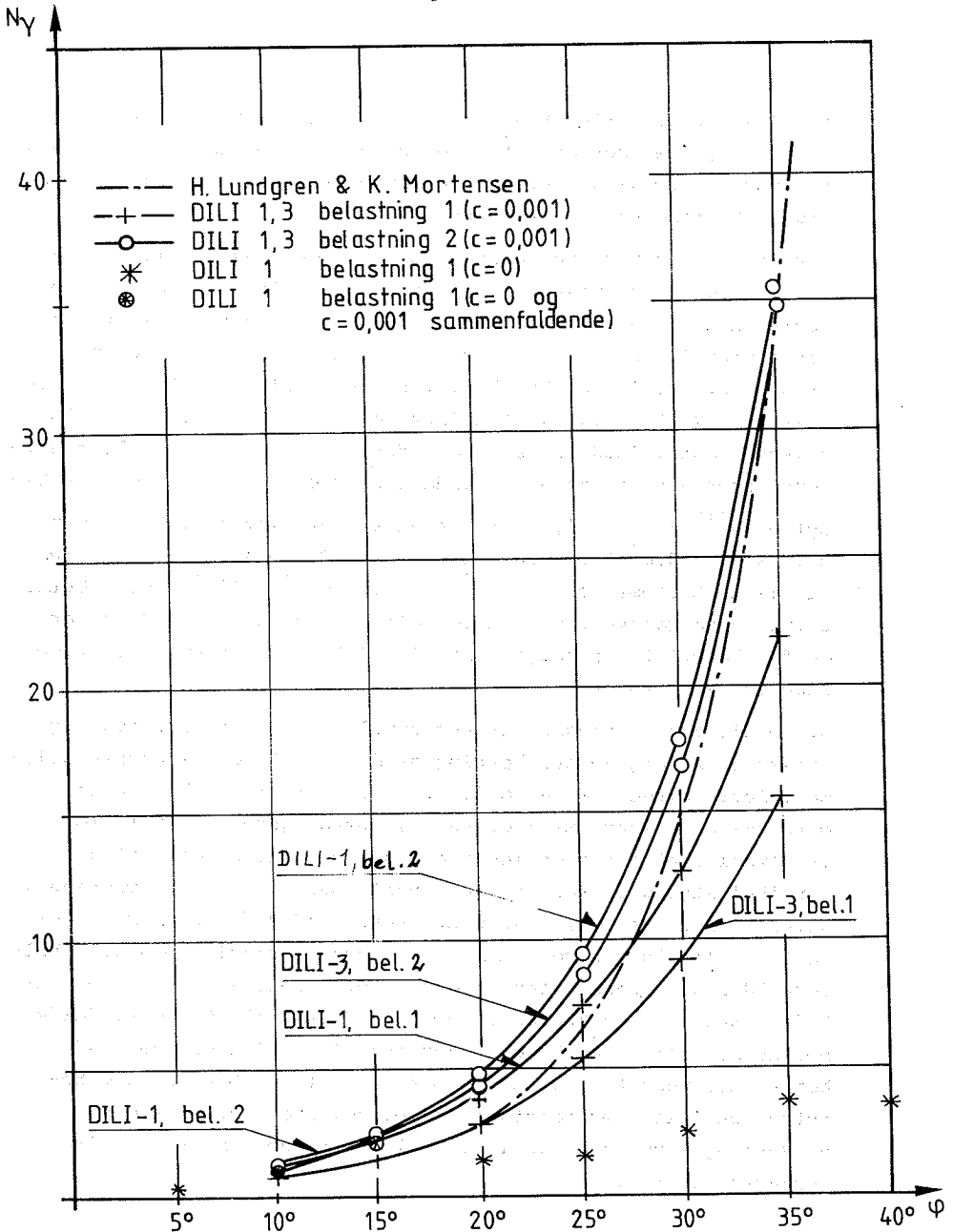


Fig. 4.19  $N_y$ -værdier bestemt i eksempel 4 (DILI-1 og DILI-3).

for løsningen. Dette er derfor søgt forbedret ved at vælge  $c = 0.001$ , idet der derefter reduceres i bæreevnen ud fra hvad en større  $c$  værdi giver. Som det fremgår, fås en ganske betydelig forbedring af resultaterne.

For de modificerede beregninger ses, at der fås rimelige løsninger, og det fremgår, at der er en væsentlig forskel på, om 'belastning 1' eller '2' anvendes. Ved de tilnærmelsesmetoder, der sammenlignes med, antages stribefundamentet at være fuldstændig stift, derfor bør benyttes 'belastning 2'. Af tabel 4.8 samt fig. 4.20 fremgår, at differencen mellem resultaterne for voksende antal inddelinger under fundamentet synes at blive halveret hver gang antallet af inddelinger øges med 1. Idet der benyttes  $N_Y^{i+1} = N_Y^i - \Delta^i$ , hvor  $i$  angiver antallet af inddelinger pr. halv fundamentsbredde, gælder, at  $\Delta^i$  synes at ligge mellem værdierne bestemt ved  $\Delta^i = \Delta^{i-1} \cdot 0.5$  og  $\Delta^i = \Delta^{i-1} \cdot 0.6$ . Dette svarer også ganske godt til forholdene ved eks. 1 og 3, og er derfor benyttet i tabel 4.9 og fig. 4.21 til bestemmelse af de endelige  $N_Y$  værdier.

Af resultaterne fremgår, at bestemmelse af  $N_Y$  er en betydelig vanskeligere opgave end løsning af de foregående bæreevneproblemer. Dette hænger sammen med, at problemet bliver betydelig mere følsomt, idet små ændringer i spændingerne har ret stor indflydelse på det endelige resultat. Det gælder dog, at der for 'belastning 2' fås ret begrænset ændring i  $N_Y$  ved ændring i antal inddelinger ( $i$ ), når  $\phi$  er større end  $20^\circ - 25^\circ$ . For 'belastning 1' fås derimod en meget voldsom variation p.g.a. lokale forhold under fundamentet, hvorfor det endelige resultat er behæftet med stor usikkerhed. Især for dette belastningstilfælde bør derfor foretages beregninger med finere inddelinger. Af hensyn til reduktion af edb - beregningstiden bør der dog benyttes en ikke - ækvidistant inddeling, hvor der anvendes grovere og grovere inddeling, jo længere man kommer bort fra fundamentskanten.

Belastning	DILI - 1 $i = 2$	DILI - 3 $i = 3$	DILI - 6 $i = 4$	DILI - 8 $i = 5$	Endelig løsning (LIN = 3)
1	3.99 $\Delta^1 = 1.13$	2.86 $\Delta^2 = 0.63$ (55%)	2.23 $\Delta^3 = 0.40$ (63%)	1.83	1.74 <sup>1)</sup> 1.18 <sup>2)</sup>
2	4.89 $\Delta^1 = 0.59$	4.30 $\Delta^2 \geq 0.28$ (47%)	$\leq 4.02$ $\Delta^3 \leq 0.24$ (85%)	3.78	3.72 <sup>1)</sup> 3.43 <sup>2)</sup>

$i$  = antal inddelinger

1)  $\Delta^i = \Delta^{i-1} - 1 \cdot 0.5$  (kun led  $\geq 0.01$  medtages)

2)  $\Delta^i = \Delta^{i-1} - 1 \cdot 0.6$  (kun led  $\geq 0.01$  medtages)

Tabel 4.8 Løsningsforløb for  $N_Y$   
når  $\varphi = 20^\circ$ .

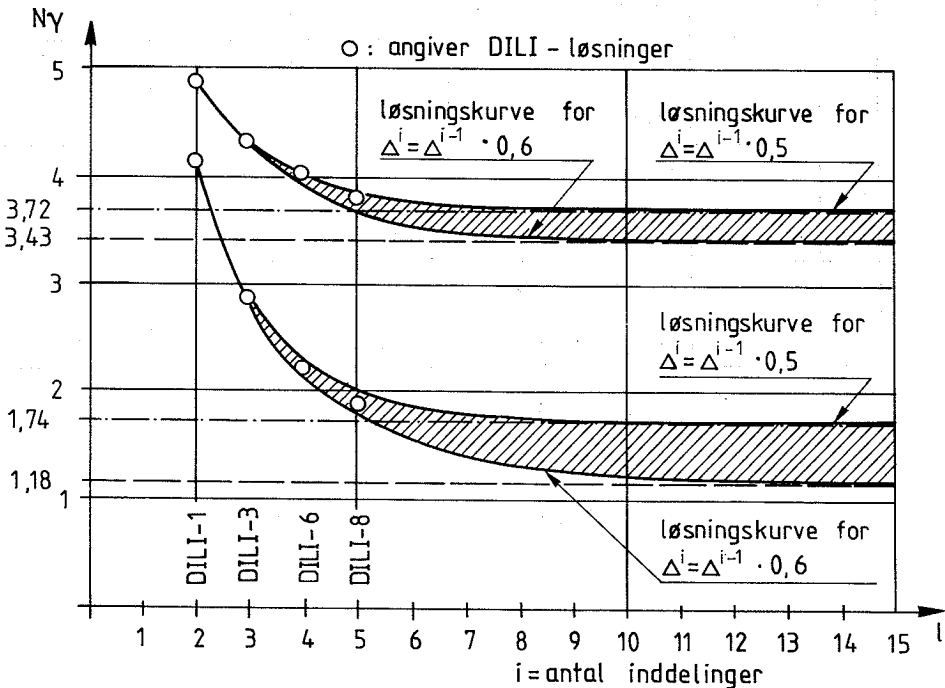


Fig. 4.2o Løsningsforløb for  $N_Y$ , når  $\varphi = 20^\circ$ .

$\varphi$	Belastning	$\Delta^1 = (\text{DILI-1}) - (\text{DILI-3})$	Resulterende $N_y$		Reduktion for $c=0.001$
			$\Delta^i = \Delta^{i-1} \cdot 0.5$	$\Delta^i = \Delta^{i-1} \cdot 0.6$	
10°	1	1.02-0.73=0.29	0.45	0.31	0.01
	2	1.17-0.95=0.22	0.74	0.63	0.01
15°	1	2.10-1.51=0.59	0.93	0.63	0.011 <sup>1)</sup>
	2	2.49-2.10=0.39	1.72	1.52	0.01
20°	1	3.99-2.86=1.13	1.74	1.18	0.02
	2	4.89-4.30=0.59	3.72	3.43	0.02
25°	1	7.23-5.17=2.06	3.11	2.09	0.023 <sup>1)</sup>
	2	9.31-8.65=0.66	8.00	7.68	0.02
30°	1	12.64-9.05=3.59	5.47	3.68	0.04
	2	17.91-16.95=0.96	16.00	15.52	0.04
35°	1	21.79-15.60=6.29	9.32	6.18	0.052 <sup>1)</sup>
	2	34.89-35.67=-0.78	(34.89)	(35.67)	

1) iflg.  $c = 0.01$  og  $c = 0.001$  fra tabel 4.7

Tabel 4.9 Endelige  $N_y$ -værdier.

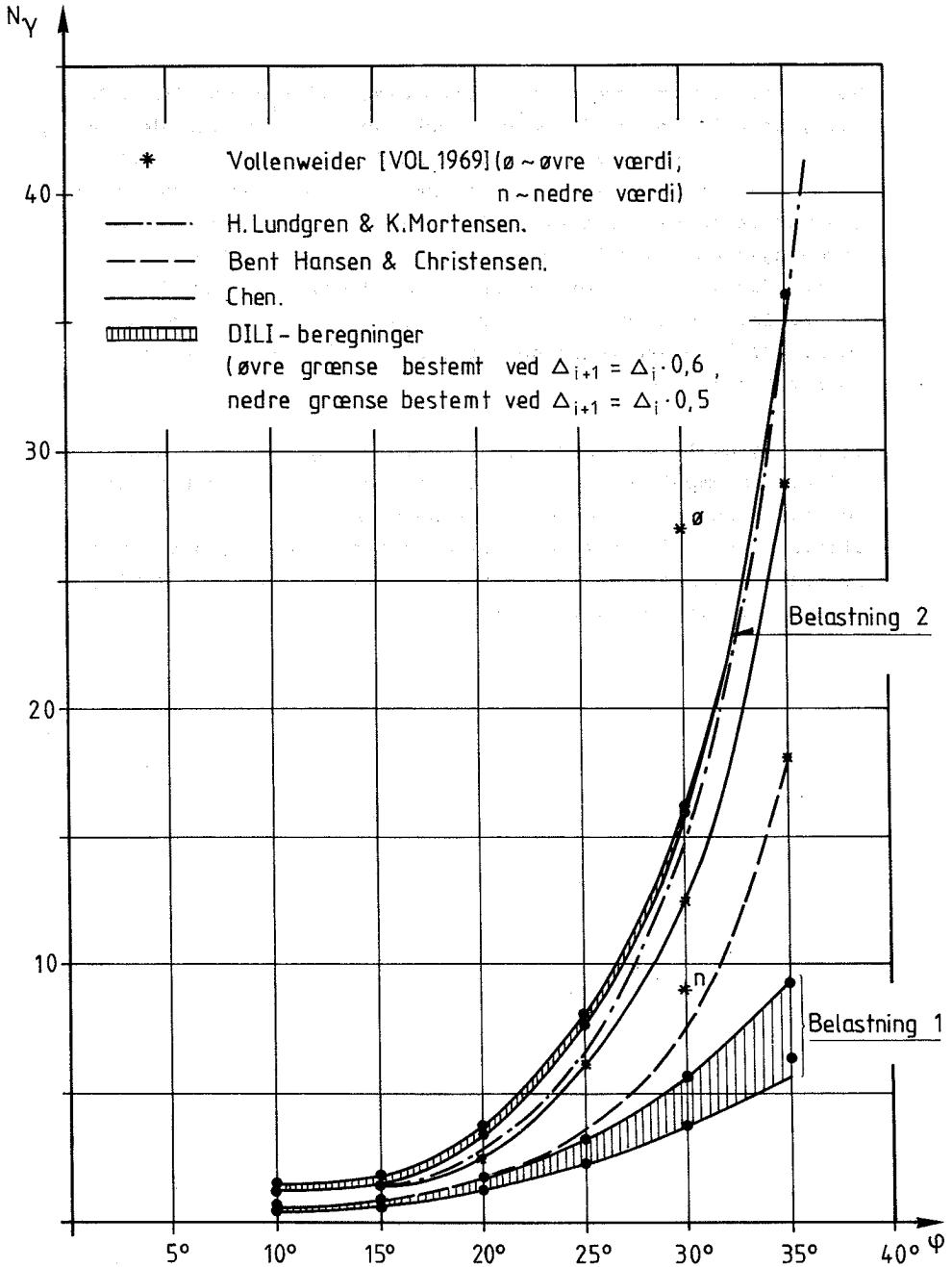
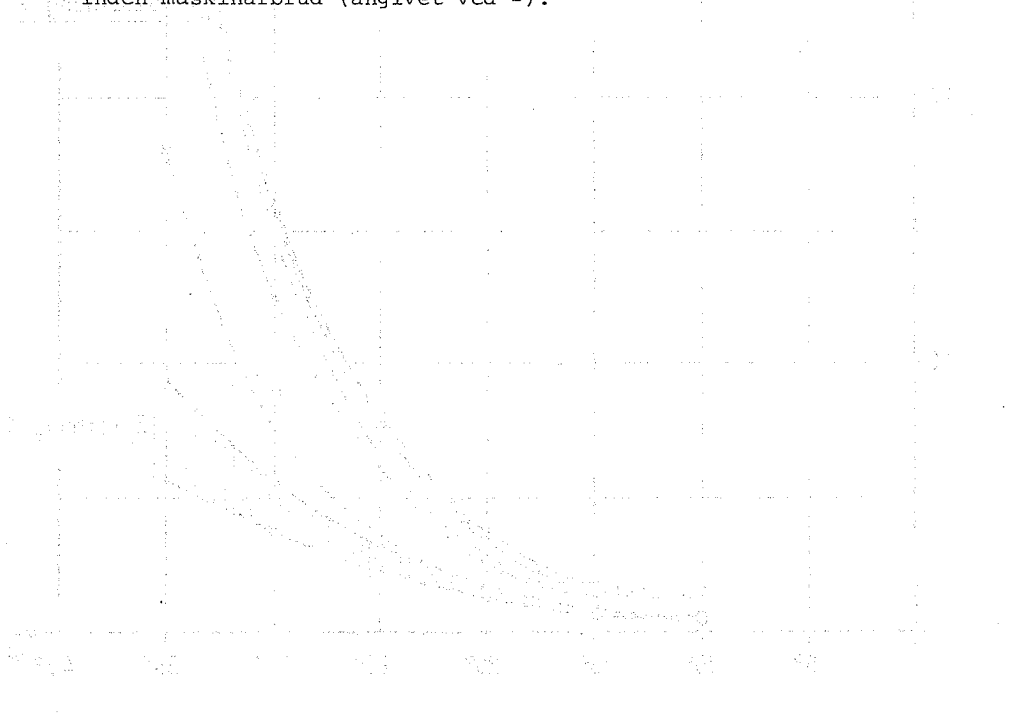


Fig. 4.21  $N_y$ -værdier.

Ved sammenligning med andre bestemmelser af  $N_y$  ses af fig. 4.18 og 4.21, at belastning 2 stemmer ganske godt overens med de løsninger, som Sokolovski [SOK, 1965] og Lundgren & Mortensen [LU&M, 1953] angiver. Det skal dog bemærkes, at sidstnævnte reference angiver en løsning for et ru fundament (der kan optages forskydningsspændinger langs fundamentet), medens der her betragtes glatte fundamenter. Det bemærkes endvidere, at de her bestemte  $N_y$  værdier ligger over de, der er bestemt af Chen & Davidson [C&D, 1973]. Disse løsninger er baseret på brudfigurer for et vægtløst jordlegeme.

Sluttelig skal det bemærkes, at de problemer, der er behandlet i dette eksempel, giver noget længere beregningstider i optimeringsfasen end ved de øvrige eksempler. I nogle tilfælde har tidsgrænserne på eksemplerne været sat for små, og bæreevnen er bestemt på den sikre side ud fra den sidst bestemte løsning inden maskinafbrud (angivet ved  $\leq$ ).



## KONKLUSION

På basis af plasticitetsteoriens nedreværdisætning er udviklet to numeriske optimeringsmetoder for 2-dimensionale legemer med plan spændingstilstand (skiver) el. plan deformationstilstand. den ene bygger på anvendelse af en element-ligevægtsmetode til bestemmelse af en statisk tilladelig spændingsfordeling (ELLI-metoden), medens den anden benytter Airy's spændingsfunktion og differensligninger (DILI-metoden). I begge tilfælde lineariseres flydebetingelserne, og bæreevne/materialebehov optimeres ved anvendelse af lineær programmering.

Fordelene ved ELLI-metoden er, at den giver statistisk korrekte spændingsfordelinger, hvilket altid bevirker sikre nedreværdier, samt at den kan tilpasses vilkårligt formede legemer på grund af trekantede elementer.

DILI-metoden derimod er en tilnærmelsesmetode, der er bygget op over et rektangulært net. De umiddelbare fordele ved metoden er imidlertid, at den for samme antal uafhængige variable som ved ELLI-metoden fører til væsentligt færre antal restriktioner, samt at rangbestemmelse af et stort ligningssystem kan undgås. Hertil kommer, at den synes mere fleksibel, da den ikke stiller så store krav til spændingernes fordeling som ELLI-metoden (lineær fordeling).

Ud fra udregnede eksempler i kapitel II og III underbygges ovenstående betragtninger. ELLI-metoden giver således generelt ret dårlige resultater, medens DILI-metoden udviser gode resultater i de tilfælde, der kan sammenlignes med eksakte løsninger. At metoden ikke er en korrekt ligevægtsmetode, viser sig således i praksis at være af underordnet betydning. Det kan derfor konkluderes, at DILI-metoden er bedst egnet til bestemmelse af statisk tilladelige spændingsfordelinger.

Jernbetonproblemerne i kapitel II synes at være de sværeste at løse med DILI-metoden, da det kan være vanskeligt at overføre et skråt én-akset tryk uden armeringsbehov. Det resulterende armeringsbehov er dog ret lille og vil ofte være dækket af den minimumsarmering, der må kræves, for at skiven kan regnes ideal-plastisk.

En væsentlig fordel ved metoden er, at der - jf. kapitel I - let kan tages hensyn til flere lasttilfælde, således at den absolut optimale armering kan bestemmes. Desuden kan armering i bestemte zoner prioriteres, ved at armeringsparametrene multipliceres med passende faktorer.

Løsning af bæreevneproblemer for stribefundamenter har iflg. kapitel III vist sig meget fordelagtigt ved anvendelse af DILI-metoden. Med den bedste af de anvendte lineariseringer fås således løsninger, der afviger med mindre end 5-10% af, hvad eksakte eller tilnærmede løsninger giver. Dette gælder dog ikke tilfælde, hvor kohæsionen  $c = 0$  eller  $c \approx 0$ , da disse problemer er særdeles følsomme over for små spændingsændringer.

Sammenholdes ovenstående betragtninger med, at metoden også kan benyttes på problemer med varierende materialekarakteristika over det betragtede jordlegeme, synes det derfor at kunne fastslås, at metoden med fordel kan anvendes ved geotekniske beregninger. Metoden synes også at kunne tillempes til andre geotekniske problemer, der kan betragtes som værende plane. Dette gælder f.eks. spunsvægsproblemer, hvor eksempelvis spunsvæggens flydemoment ønskes minimeret.

Sluttelig skal nævnes, at DILI-metoden, der har været benyttet ved eksemplerne i kapitel II og II, har været baseret på ækvidistante netinddelinger. Årsagen hertil har været ønsket om at benytte enkle og simple netinddelinger. Ved praktisk anvendelse bør metoden imidlertid udvides til at omfatte ikke-ækvidistante inddelinger. Dette kan således bøde noget på det forhold, at beregningerne har en tendens til at svulme op på grund af, at beregningstiden for optimeringsfasen er proportional dels med antal variable i 2. potens, dels med antal restriktioner.



REFERENCELISTE.

- [AND,1971] Anderheggen, E.: Starr-plastische Traglastberechnungen mittels der Methode der Finiten Elemente. Bericht Nr. 32. Institut für Baustatik, ETH. Zürich, 1971.
- [AND,1976] Anderheggen, E.: Finite Element Analysis Asuming Rigid-Ideal-Plastic Material Behavior, pp. 1-17 in: Limit Analysis Using Finite Elements. Edit. R.H. Mallett, The Amer. Soc. of Mech. Eng. New York, 1976.
- [A&K, 1972] Anderheggen, E. & Knöpfel, H.: Finite Element Limit Analysing using Linear Programming. Int. Jour. of Solids Structures. Vol. 8, pp. 1413-1431, 1972.
- [BER,1975] Berg, S.: A Model for Capacity Control of a Reinforced Concrete Shell Section. Sintef Rapport STF 71. A 75040, NTH. Trondheim, 1975.
- [BIR,1976] Biron, A.: On Results and Limitations of Lower Bound Limit Analysis through Nonlinear Programming, pp. 19-33 in: Limit Analysis using Finite Elements. Edit. R. H. Mallett, The Amer. Soc. of Mech. Eng. New York, 1976.
- [BÄC,1973] Bäcklund, Jan: Finite Element Analysis of Nonlinear Structures. Diss. nr. 129, Chalmers Tekniska Högskola. Göteborg, 1973.
- [B&H,1970] Belytschko, T. & Hodge, P.G.jr.: Plane Stress Limit Analysis by Finite Elements. Jour. of Eng. Mechanics Div., ASCE. Vol. 96, EM 6, pp. 931-944, 1970.

- [BI&H,1967] Biron, A. & Hodge, P.G.jr.: Limit Analysis of Rotationally Symmetric Shells under Central Boss Loadings by a Numerical Method. Jour. of Appl. Mechanics, Vol. 34, pp. 644-650, 1967.
- [B m.fl. 1,] Bræstrup, M.W., Nielsen, M.P., Bach, Finn & Jensen, 1976 B.Chr.: Shear Tests on Reinforced Concrete T-Beams. R. 71, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth. Lyngby, 1976.
- [B m.fl. 2,] Bræstrup, M.W., Nielsen, M.P., Bach, Finn & Jensen, 1976 B.Chr.: Concrete Plasticity - Beam shear, Punching Shear, shear in Joints. Danish Doc. for Structural Science and Engineering, Special Publ., Dec. 1976.
- [CHA,1972] Chan, H.S.: The Collapse Load of Reinforced Concrete Plates. Int. Jour. for Num. Meth. in Eng. Vol. 5, pp. 57-64, 1972.
- [CHE,1975] Chen Wai-Fah: Limit Analysis and Soil Plasticity. Elsevier Scientific Publ. Comp. Amsterdam et al., 1975.
- [COU,1773] Coulomb. C.A.: Essai sur une application des regles de maximes et minimes a quelques a problemes de statique, relatifs a l'architecture. Memocu presenté a l'Academie des Science. Paris, 1773.
- [COX,1962] Cox, A.D.: Axially-symmetric Plastic Deformation in soils - II. Int. Jour. of Mech. Sciences. Vol. 4, pp. 371-380, 1962.

- [C&D,1973] Chen,W.F. & Davidson, H.L.: Bearing Capacity Determination by limit Analysis. Jour. of the Soil Mech. and Found. Div., ASCE, Vol. 99, SM6, pp. 433-449, 1973.
- [D&S,1956] Drucker, P.C. & Shield, R.T.: Design for Minimum Weight. Proc. 9th Int. Congr. on Appl. Mech. Book 5, Brussels, pp. 212-222, 1956.
- [FOU,1954] Foulkes, J.: The minimum-weight design of structural frames. Proc. Roy. Soc. London, series A. Vol. 233, pp. 482-494, 1954.
- [FOX,1971] Fox, Richard L.: Optimization Methods for Engineering Design. Addison & Wesley. Reading, Mass., 1971.
- [FUN,1977] Fundering, Dansk Ingeniørforenings norm for DS 415. Teknisk Forlag. København, 1977.
- [F&MC,1968] Fiacco, A.V. & McGormick, G.P.: Nonlinear Sequential Unconstrained Minimization Techniques. John Wiley & Sons. Inc. New York, 1968.
- [F&V,1973] Facciolo, E. & Vitiello, E.: A Finite Element Programming Method for the Limit Analysis of thin Plates. Int. Jour. for Num. Meth. in Eng. Vol. 5, pp. 311-325, 1973.
- [GAS,1964] Gass, Saul J.: Linear Programming-Methods and Applications. McGraw-Hill. New York, 1964.
- [G&Z,1973] Gallagher, R.H. & Zienkiewicz, O.C. ed.: Optimum Structural Design-Theory and Applications. John Wiley & Sons. London, 1973.

- [HA,B,1961] Hansen, J. Brinch: A General Formula for Bearing Capacity. Ingeniøren, int. ed. Vol. 5, pp. 38-46, 1961.
- [HAN,1966] Hansen, Bent: A Theory of Plasticity - for frictionless materials. Teknisk Forlag. Copenhagen, 1966.
- [HIL,1974] Hillerborg, A.: Dimensionering av armerade betongplatter enligt strimlemetoden. Almquist & Wiksell. Stockholm, 1974.
- [HOL,1972] Holst, Ole: Lineær programmering - med EDB-program og eksempler. F 43, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DtH, Lyngby, 1972.
- [HOU,1965] Householder, S.: The Theories of Matrices in Numerical Analysis. Blaisdell publ. co. New York, 1965.
- [HUP, 1970] Hupfer, P.: Optimierung von Baukonstruktionen. B.G. Teubner. Stuttgart, 1970.
- [H&B,1968] Hodge, P.G. & Belytschko, T.: Numerical Methods for the Limit Analysis of Plates. Jour. of Appl. Mechanics. Vol. 35, pp. 796-802, 1968.
- [H&C,1969] Hansen, B. & Christensen, N.H.: Theoretical Bearing Capacity of very shallow Footings, discuss. Jour. of the Soil and Found. Div. ASCE, Vol. 95, SM6, pp. 1568-1573, 1969.
- [H&M,1967] Hayes, D.J. & Marcal, P.V.: Determination of Upper Bounds for Problems in Plane Stress Using Finite Element Techniques. Int. Jour. of Mech. Sciences. Vol. 9, pp. 245-251, 1967.

- [H m.fl.,] Hansen, K.E., Bryder, K.L. & Nielsen, M.P.: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. R 91, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DTH, Lyngby, 1978.
- [HA m.fl.,] Harremoes, Krebs Ovesen & Moust Jacobsen: Lærebog 1978 i geoteknik 1-2. 2.udg. Polyteknisk Forlag. København, 1970.
- [IBM-M,1972] IBM manual: SH 20 - 0968. Mathematical Programming System-Extended (MPSX) and Generalized Upper Bounding (GUB). Program Description, 1972.
- [IBM-S,1975] IBM manual: H 20 - 0205. System 1360 Scientific Subroutine Package, Version 3, Programmes Manual, 1975.
- [JOH,1943] Johansen, K.W.: Brudlinieteorier. J. Gjellerups Forlag. København, 1943.
- [KAL,1965] Kaliszky, S.: Economic Design by the ultimate load Method I-III, Concrete & Constructional Engineering. Vol. 60, No. 10, 11, 12, 1965.
- [KNÖ1972] Knöpfel, A.: Berechnung starr-plastischen Platten mittels finiten Elemente, Diss. No. 5034. Eidgenössische Tech. Hochsch., Zürich, 1973.
- [KRE,1973] Krenk, S.: Differensoperation til skiveberegning. Bygningsstatistiske Meddelelser. Vol. 54, Nr. 2, pp. 51-62. København, 1973.
- [KÖT,1903] Kötter, F.: Die Bestimmung des Druckes am gekrümmten Gleitflächen. Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. der Wiss. Berlin, 1903.

- [K&L,1965] Koopman, D.C.A. & Lance, R.H.: On Linear Programming and Plastic Limit Analysis. Jour. of the Mech. and Physics of Solids. Vol. 13, 1965.
- [K&M,1973] Kuester, James L. & Mize, Joe H.: Optimization Techniques with Fortran. McGraw-Hill. New York, 1973.
- [LUN,1949] Lundgren, H.: Cylindrical Shells. DTH. Diss. Copenhagen, 1949.
- [LYS,1970] Lysmer, J.: Limit Analysis of Plane Problems in Soil Mechanics. Jour. of Soil Mech. and Found. Div., ASCE. Vol. 96, SM 4, pp. 1311-1334, 1970.
- [L-H,1975] Lange-Hansen, P.: Generel plasticitetsteori I-II. Forelæsningsnotat F 55 og F 56, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth. Lyngby, 1975.
- [L&M,1972] Lowe, P.G. & Melchers, R.E.: On the Theory of Optimal Constant Thickness Fibre Reinforced Plates. I. Int. Jour. of Mech. Sciences. Vol. 14. No. 5, pp. 311-324, 1972.
- [LU&M,1953] Lundgren, H. & Mortensen, K.: Determination by the Theory of Plasticity of the Bearing Capacity of Continuous Footings on Sand, pp. 409-412, 3rd Int. Conf. Soil Mech., Vol. 1, Zürich, 1953.
- [MEL,1973] Melchers, R.E.: Optimal Design of Variable Thickness Reinforced Plates. Civil. Engrs. No. 1-2, pp. 99-102, 1973.
- [MEL,1976] Melchers, R.E.: Minimum Reinforcement of Nonuniform Plates. Jour. of Eng. Mech. Div. ASCE. Vol. 102, EM6, pp. 945-955, 1976.

- [MEY,1948] Meyerhof, G.G.: An Investigation for the Foundations of a Bridge on Dense Sand. Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mech., Vol. 1, pp. 237-243, Rotterdam, 1948.
- [MOH,1882] Mohr, O.: Über die Darstellung des Spannungs Zustandes und des Deformations Zustandes eines Körper-Elements. Zivilingenieur. 1882.
- [MOR,1965] Morley, C.T.: The Minimum Reinforcement of Concrete Slabs. Int. Jour. of Mech. Sciences. Vol. 8, No. 4, pp. 305-319, 1965.
- [MOR,1970] Morley, C.T.: Optimum Reinforcement of Concrete Slabelements against Combinations of Moments and Membrane Forces. Mag. of Concrete Research. Vol. 22, pp. 155-162, 1970.
- [MRO,1967] Mroz, Z.: On the Optimum Design of Reinforced Slabs. Acta Mechanica. Vol. 3, No. 1, pp. 34-55, 1967.
- [M&G,1977] Morley, C.T. & Gulvanessian, H.: Optimum Reinforcement of Concrete Slab Elements. Proc. Instu. Civl. Engrs. Part 2, Vol. 63, pp. 441-454, 1977.
- [M&P,1964] Marcal, P.V. & Prager, W.: A Method of Optimal Plastic Design. Journal de Mecanique. Vol. 3, No. 4, pp. 509-530, 1964.
- [M&S,1963] Massonnet, Ch. & Save, M.: Calcul Plastique des Constructions, Centro Belgo, Bruxelles, 1963.
- [M m.fl.,] Mair, G., Zavelani-Rossi, A. & Benedetti, D.: A  
1972 Finite Element Approach to Optimal Design of Plastic Structures in Plane Stress. Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., Vol. 4, pp. 455-473, 1972.

- [N,LO,1976] Nielsen, Leif Otto: Elementmetoden, variations-principper og elementtyper. 2. udg. F 50, Afdelingen for Bærende Konstruktioner, Dth, Lyngby, 1976.
- [N,MP,1964] Nielsen, Mogens Peter: Limit Analysis of Reinforced Concrete Slabs. Acta Polytechnica Scandinavia, CI 26. København, 1964.
- [N,MP,1969] Nielsen, Mogens Peter: Om jernbetonskivers styrke. Polyteknisk Forlag. København, 1969.
- [NUM,1972] Numerisk Institut: Løsning af lineare ligningssystemer. Hæfte 23, Dth, Lyngby, 1972.
- [N&P,1972] Niordson, F.I. & Pedersen, P.: A Review of Optimal Structural Design. Proc. 13th Congr. Theo. Appl. Mech. IUTAM. Moscow University, 1972. Springer Verlag. Berlin, pp. 264-278, 1972.
- [N m.fl., 1970] Nielsen, M.P. & Pilegård-Hansen, L. & Rathkjen, A.: Mekanik 2.2 - rumlige deformations- og spændingstilstande. DIA-B. Ålborg, 1970.
- [O&S,1964] Proceedings of the Symposium on Non-Classical Shell Problems. Warsaw 2-5 September, 1963. Edit. Olszak, W. & Sawczuk, A. North Holland Publ. Company, Amsterdam, 1964.
- [PEA,1976] Peano, A.: Limit Analysis via Stress Functions, pp. 67-86 in: Limit Analysis Using Finite Elements. Edit. R.H. Mallett, The Amer. Soc. of Mech. Eng. New York, 1976.
- [PED,1974] Pedersen, H.: Optimum Design of thin Reinforced Concrete Plates. Proc. of the Int. Symp. on Discrete Meth. in Eng. Esta. Libri, Milano, Sept., 1974.



- [POL,1975] Polizzotto, Casrenze: Optimum Design of Structures under combined Stresses. Int. Jour. of Solids Structures. Vol. II, pp. 539-553, 1975.
- [POU,1967] Poulsen, E.: Ren mekanik 4, brudbetingelser. Polyteknisk Forlag. København, 1967.
- [PRA,1952] Prager, W.: The General Theory of Limit Design. Proc. 8th Int. Congr. Theor. Appl. Mech. Vol. 2, pp. 65-72. Istanbul, 1952.
- [PRA,1959] Prager, W.: An introduction to Plasticity. London, 1959.
- [PRA,1962] Prager, W.: Lineare Ungleichungen in der Baustatik. Schweizerische Bauzeitung 80. Jahrgang, Heft 19, pp. 315-320. 1962.
- [PRN,1920] Prandtl, L.: Über die Härte plastischer Körper. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1920.
- [P&H,1951] Prager, W. & Hodge, P.G.jr.: Theory of Perfectly Plastic Solids. New York, 1951.
- [P&T,1972] Pian, T.H.H. & Tong, P.: Basis of finite element methods continuum. Int. Jour. for Num. Meth. in Eng. Vol. 1, pp. 3-28, 1969.
- [ROB,1973] Robinson, J.: Integrated Theory of Finite Element Methods. John Wiley & Sons. London, 1973.
- [R&L,1970] Ranaweera, M.P. & Lechie, F.A.: Bound Methods in Limit Analysis, - Finite Element Techniques in Structural Mechanics. Ed. Brebbia & Tottenham. Southampton, April 1970.

- [R&M,1974] Rajendran, S. & Morley, C.T.: A general yield Criterion for Reinforced Concrete slab Elements. Mag. of Concrete Research. Vol. 26, pp. 212-220, 1974.
- [SOA,1967] Soave, Mircea: Application of Finite Difference Equations to Shell Analysis. Bucharest, 1967.
- [SOK,1965] Sokolovskii, V.V.: Statics of Granular Media. Pergamon Press, New York, 1965.
- [SPE,1962] Spencer, A.J.M.: Perturbation Methods in Plasticity - III. Jour. of the Mech. and Physics of Solids. Vol. 10, pp. 165-177, 1962.
- [S&P,1968] Sheu, C.Y. & Prager, W.: Recent Development in Optimal Structural Design. Appl. Mech. Rev. Vol. 21. No. 10, pp. 985-992, 1968.
- [S&S,1964] Save, M.A. & Shield, R.T.: Minimum Weight Design of Sandwich Shells Subjected to fixed and moving Loads. Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech. IUTAM (Munich, 1964), Springer, pp. 341-349. Berlin, 1966.
- [TER,1943] Terzaghi: Theoretical Soil Mechanic. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1943.
- [T&G,1951] Timoshenko, S. & Goodier, J.N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1951.
- [VOL,1969] Vollenweider, U.G.: Beitrag zur Behandlung bodenmechanischer Grenzwertprobleme nach der Plastizitätstheorie. Bericht Nr. 21. Institut für Baustatik. ETH. Zürich, 1969.

- [WAT,1966] Watwood, V.B.jr.: A Study of the Equilibrium Model for Use in Finite Element Analysis. Ph. D. Thesis. U. of Washington, Seattle. Washington, 1966.
- [WHI,1973] White, William W.: A Report on Computing Algorithms for Mathematical Programming. Computing Surveys. Vol. 5. No. 3, pp. 135-166, 1973.
- [WOL,1964] Wolfensberger, R.: Traglast und Optimale Bemessung von Platten. Technische Forschungs und Beratungsstelle der Schweizerische Zementindustrie. Wildeg, 1964.
- [WOO,1961] Wood, R.H.: Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates. Thames & Hudson. London, 1961.
- [W&B,1963] Wasintynski, Z. & Brandt, A.: The Present State of Knowledge in the Field of Optimum Design at Structures. Appl. Mech. Rev. Vol. 16, No. 5, pp. 341-350, 1963.
- [W&H,1968] Watwood, V.B. & Hartz, B.J.: An Equilibrium Stress Field Model for Finite Element Solutions of Two-dimensional Elastostatic Problems. Int. Jour. of Solid Structures. Vol. 4, pp. 857-873, 1968.
- [YAS,1977] Yasserli, S.F.: Optimal Design of Plates. Cambridge, 1977.
- [ZAV,1973] Zavelani, A.: A Compact Linear Programming Procedure for Optimal Design in Plane Stress. Int. Struct. Mech. Vol. 2(4), pp. 301-324, 1973.
- [ZIE,1971] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill. London, 1971.

# APPENDIX.

## APPENDIX 1: Lineariserede flydebetingelser for jernbetonskiver.

De lineariserede betingelser kan skrives på formen  $\sigma_x \cdot A + \tau_{xy} \cdot B + \sigma_y \cdot C + \phi_x \sigma_c \cdot D + \phi_y \sigma_c \cdot E \geq \sigma_c F$ , hvor betydningen af konstanterne fremgår af det følgende:

### LIN = 1, 10 restriktioner.

$$(A1-1) \quad -\sigma_x + \tau_{xy} + \phi_x \sigma_c \geq 0$$

$$+ \tau_{xy} - \sigma_y + \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$+ \sigma_x + \tau_{xy} \geq -\sigma_c$$

$$+ \tau_{xy} + \sigma_y \geq -\sigma_c$$

$$+ \tau_{xy} \geq -1/2 \sigma_c$$

### LIN = 2, 26 restriktioner.

$$(A1-2) \quad -\sigma_x + 0,4142 \tau_{xy} + \phi_x \sigma_c \geq 0$$

$$+ 0,4142 \tau_{xy} - \sigma_y + \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- \sigma_x + 1,4142 \tau_{xy} - 0,4142 \sigma_y + \phi_x \sigma_c + 0,4142 \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- 0,4142 \sigma_x + 1,4142 \tau_{xy} - \sigma_y + 0,4142 \phi_x \sigma_c + \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- \sigma_x + 2,4137 \tau_{xy} + \phi_x \sigma_c \geq -0,7065 \sigma_c$$

$$+ 2,4137 \tau_{xy} - \sigma_y + \phi_y \sigma_c \geq -0,7065 \sigma_c$$

$$+ \sigma_x + 0,4142 \tau_{xy} \geq -\sigma_c$$

$$+ 0,4142 \tau_{xy} + \sigma_y \geq -\sigma_c$$

$$+ \sigma_x + 1,4142 \tau_{xy} + 0,4142 \sigma_y \geq -1,4142 \sigma_c$$

$$+ 0,4142 \sigma_x \pm 1,4142 \tau_{xy} + \sigma_y \geq - 1,4142 \sigma_c$$

$$+ \sigma_x \pm 2,4137 \tau_{xy} \geq - 1,7065 \sigma_c$$

$$\pm 2,4137 \tau_{xy} + \sigma_y \geq - 1,7065 \sigma_c$$

$$\pm \tau_{xy} \geq - 1/2 \sigma_c$$

LIN = 4, 22 restriktioner.

$$(A1-3) - \sigma_x + \phi_x \sigma_c \geq 0$$

$$- \sigma_y + \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- \sigma_x \mp 0,5359 \tau_{xy} - 0,0718 \sigma_y + \phi_x \sigma_c + 0,0718 \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- 0,0718 \sigma_x \mp 0,5359 \tau_{xy} - \sigma_y + 0,0718 \phi_x \sigma_c + \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- \sigma_x \mp 1,1548 \tau_{xy} - 0,3334 \sigma_y + \phi_x \sigma_c + 0,3334 \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- 0,3334 \sigma_x \mp 1,1548 \tau_{xy} - \sigma_y + 0,3334 \phi_x \sigma_c + \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- \sigma_x \mp 2\tau_{xy} - \sigma_y + \phi_x \sigma_c + \phi_y \sigma_c \geq 0$$

$$- \sigma_x \mp \tau_{xy} + \phi_x \sigma_c \geq -0,1340 \sigma_c$$

$$\mp \tau_{xy} - \sigma_y + \phi_y \sigma_c \geq -0,1340 \sigma_c$$

$$+ \sigma_x \pm \tau_{xy} \geq -\sigma_c$$

$$\pm \tau_{xy} + \sigma_y \geq -\sigma_c$$

$$\pm \tau_{xy} \geq 1/2 \sigma_c$$

## APPENDIX 2: Lineariserede flydebetingelser ved stribefundamenter (Coulomb's flydebetingelse).

Med udgangspunkt i fig. 3.8 og 3.9 i kapitel III kan opstilles udtryk for den lineariserede flydebetingelse. Først bestemmes retningvektorerne,  $\bar{b}_0, \bar{b}_1 \dots \bar{b}_n$  ud fra punkterne  $s_i$  ( $s_0 \dots s_n$ ) og T, hvor de førstnævnte er dannet ved skæring af linie i med  $\sigma_x = -\sigma_y = \sigma$ :

$$(A2-1) \text{ Punkt T: } (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (c \cot\varphi, c \cot\varphi, 0)$$

$$\text{Punkt } S_0: (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (c \cos\varphi, -c \cos\varphi, 0)$$

$$\text{Punkt } S_i: (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (c \cos\varphi \cdot \cos \theta_i, -c \cos\varphi \cdot \cos \theta_i, c \cos\varphi \sin \theta_i).$$

Retningsvektorerne bliver da

$$(A2-2) \bar{b}_0 = \bar{s}_0 T = c (+\cos\varphi - \cot\varphi, -\cos\varphi - \cot\varphi, 0) / c \\ = (+\cos\varphi - \cot\varphi, -\cos\varphi - \cot\varphi, 0) = (\gamma_0, \kappa_0, \eta_0)$$

$$\bar{b}_i = \bar{s}_i T = c (\cos\varphi \cos \theta_i - \cot\varphi, -\cos\varphi \cos \theta_i - \cot\varphi, c \cos\varphi \sin \theta_i) / c \\ = (\cos\varphi \cos \theta_i - \cot\varphi, -\cos\varphi \cos \theta_i - \cot\varphi, c \cos\varphi \sin \theta_i) \\ = (\gamma_i, \kappa_i, \eta_i).$$

Hermed er det muligt at bestemme normalvektorerne til lineariseringsfladerne. Disse bestemmes ved:  $\bar{n}_1 = \bar{b}_1 \times \bar{b}_0$ ,  $\bar{n}_2 = \bar{b}_2 \times \bar{b}_1$  o.s.v., d.v.s.

$$(A2-3) \bar{n}_1 = (\kappa_1 \eta_0 - \eta_1 \kappa_0, \eta_1 \gamma_0 - \gamma_1 \eta_0, \gamma_1 \kappa_0 - \kappa_1 \gamma_0) = (n_{x,1}, n_{y,1}, n_{xy,1})$$

$$\bar{n}_i = (\kappa_i \eta_{i-1} - \eta_i \kappa_{i-1}, \eta_i \gamma_{i-1} - \gamma_i \eta_{i-1}, \gamma_i \kappa_{i-1} - \kappa_i \gamma_{i-1}) \\ = (n_{x,i}, n_{y,i}, n_{xy,i})$$

Da såvel fladernes normalvektor  $\bar{n}_i$  som et punkt, de går igen-

nem, nemlig punkt T, kan de afgrænsende flader bestemmes ved:

$$(A2-4) \quad f_1: n_{x,1}(\sigma_x - T_x) + n_{y,1}(\sigma_y - T_y) + n_{xy,1}(\tau_{xy} - T_{xy}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$+ (\kappa_1 \eta_0 - \eta_1 \kappa_0) (\sigma_x - c \cot \varphi) + (\eta_1 \gamma_0 - \gamma_1 \eta_0) (\sigma_y - c \cot \varphi) \\ + (\gamma_1 \kappa_0 - \kappa_1 \gamma_0) \tau_{xy} = 0$$

$$f_i: + (\kappa_i \eta_{i-1} - \eta_i \kappa_{i-1}) (\sigma_x - c \cot \varphi) + \\ + (\eta_i \gamma_{i-1} - \gamma_i \eta_{i-1}) (\sigma_y - c \cot \varphi) + \\ + (\gamma_i \kappa_{i-1} - \kappa_i \gamma_{i-1}) (\tau_{xy}) = 0$$

De lineariserede flydebetingelser for en fjerdedel af flydefladeren bliver da:

$$(A2-5) \quad f_i: A_i \sigma_x + B_i \sigma_y + C_i \tau_{xy} + D_i \geq 0,$$

$$\text{hvor } A_i = (\kappa_i \eta_{i-1} - \eta_i \kappa_{i-1})$$

$$B_i = (\eta_i \gamma_{i-1} - \gamma_i \eta_{i-1})$$

$$C_i = (\gamma_i \kappa_{i-1} - \kappa_i \gamma_{i-1})$$

$$D_i = (\kappa_i \eta_{i-1} - \eta_i \kappa_{i-1} + \eta_i \gamma_{i-1} - \gamma_i \eta_{i-1}) (-c \cot \varphi)$$

De øvrige flydebetingelser fås ved symmetri om  $\sigma_x = \sigma_y$  planen og giver:

$$(A2-6) \quad f_i: B_i \sigma_x + A_i \sigma_y + C_i \tau_{xy} + D_i \geq 0,$$

og ved symmetri om  $\tau_{xy} = 0$  planen, der giver:

$$(A2-7) \quad f_i: A_i \sigma_x + B_i \sigma_y - C_i \tau_{xy} + D_i \geq 0$$

$$(A2-8) \quad f_i: B_i \sigma_x + A_i \sigma_y - C_i \tau_{xy} + D_i \geq 0$$

Alt i alt fås derfor følgende lineariserede flydebetingelser:

$$A_i \sigma_x + B_i \sigma_y \pm C_i \tau_{xy} + D_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

(A2-9) f:

$$B_i \sigma_x + A_i \sigma_y \pm C_i \tau_{xy} + D_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\text{hvor } A_i = (\kappa_i \eta_{i-1} - \eta_i \kappa_{i-1})$$

$$B_i = (\eta_i \gamma_{i-1} - \gamma_i \eta_{i-1})$$

$$C_i = (\gamma_i \kappa_{i-1} - \kappa_i \gamma_{i-1})$$

$$D_i = (\kappa_i \eta_{i-1} - \eta_i \kappa_{i-1} + \eta_i \gamma_{i-1} - \gamma_i \eta_{i-1}) (-c \cot \varphi)$$

$$\gamma_i = + \cos \varphi \cos \theta_i - \cot \varphi$$

$$\kappa_i = - \cos \varphi \cos \theta_i - \cot \varphi$$

$$\eta_i = \cos \varphi \sin \theta_i ,$$

og  $\theta_i$  angiver lineariseringsvinklen i en kvartcirkel med centrum på  $(\sigma_x = \sigma_y, \tau_{xy} = 0)$  -aksen og radius parallel med  $\sigma_x$ - eller  $\sigma_y$ -aksen. D.v.s.  $\theta_0 = 0^\circ$  og  $\theta_n = 90^\circ$  som angivet på fig. 3.8.

LIN=1 , 4 restriktioner.

$$(A2-10) \quad \theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 90^\circ$$

LIN=2 , 8 restriktioner.

$$(A2-11) \quad \theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 90^\circ$$

LIN=3 , 12 restriktioner.

$$(A2-12) \quad \theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 60^\circ, \theta_3 = 90^\circ$$

LIN=4 , 12 restriktioner.

$$(A2-13) \quad \theta_0 = 0^\circ, \theta_1 = 16,3^\circ, \theta_2 = 47,9^\circ, \theta_3 = 90^\circ$$



AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER

DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE

Structural Research Laboratory

Technical University of Denmark, DK-2800 Lyngby

RAPPORTER (Reports)

(1976 - )

- R 69. PEDERSEN, MAX ELGAARD: En 2.ordens tilnærmelse til de konstitutive ligninger for beton. 1976.
- R 70. RIBERHOLT, HILMER and PETER CHR. NIELSEN: Timber under combined compression and bending stress. 1976.
- R 71. KRENCHHEL, HERBERT og J. BJØRNBÆK-HANSEN: Undersøgelse af let konstruktionsbetons væsentligste materialeparametre. 1976.
- R 72. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, FINN BACH and B. CHR. JENSEN: Shear tests on reinforced concrete T-beams. Series T. 1976.
- R 73. NIELSEN, M.P. and M.W. BRÆSTRUP: Plastic shear strength of reinforced concrete beams. 1976.
- R 74. Resume-oversigt 1975. Summaries of papers 1975. 1976.\*)
- R 75. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN, B.CHR. JENSEN and FINN BACH: Axisymmetric punching of plain and reinforced concrete. 1976.
- R 76. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Partial prestressing. 1976.
- R 77. LAURSEN, M.E.: EQSHELL. An equilibrium shell finite element for arbitrary shell geometry. 1977.
- R 78. DYRBYE, CLAES and FLEMMING BLIGAARD PEDERSEN: Rubber mountings and vibration isolation. 1977.
- R 79. BRÆSTRUP, M.W., M.P. NIELSEN and FINN BACH: Rational analysis and design of stirrups in reinforced concrete beams. 1977.
- R 80. ABK's informationsdag 1977. 1977.
- R 81. Resumeoversigt 1976. Summaries of papers 1976. 1977.
- R 82. MÖLLMANN, H.: Static and dynamic analysis of plane cable structures. 1977.
- R 83. RIBERHOLT, H.: Bolte indlimet i limtræ. 1977.
- R 84. AGERSKOV, H. and J. BJØRNBÆK-HANSEN: Fatigue strength of welded connections in round bar steel structures. 1977.
- R 85. LAURSEN, M.E., M.P. NIELSEN and M. ROIKJER: Stability analysis of beams and arches by energy methods. 1977.
- R 86. LAURSEN, M.E.: Derivation of symmetric integration formulas for triangles. 1977.
- R 87. LAURSEN, M.E.: Stability and vibration analysis of plane curved beams by an equilibrium finite element method. 1977.
- R 88. PEDERSEN, FLEMMING BLIGAARD: Vibration analysis of viscoelastically damped sandwich structures. 1978.
- R 89. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Epoxy resin repair of cracked concrete beams. 1978.\*)
- R 90. HESS, UWE, B.CHR. JENSEN, M.W. BRÆSTRUP, M.P. NIELSEN og FINN BACH: Gennemlokning af jernbetonplader. 1978.

\*) Udsolgt. Out of print.

- R 91. HANSEN, KARL ERIK, KAJ L. BRYDER og M.P. NIELSEN: Armeringsbestemmelse i jernbetonskaller. 1978.
- R 92. ASKEGAARD, V.: Stress and strain measurements in solid materials. 1978.
- R 93. SCHMIDT, HENRIK: Udbredelse af akustisk emission i beton. 1978.
- R 94. BYSKOV, ESBEN og STEEN KRENK: Konstruktionstræs mekaniske styrke. 1978.
- R 95. Resumeoversigt 1977. Summaries of papers 1977. 1978.
- R 96. DYRBYE, CLÆS: Admittance-curves. ZILSTORFF, ANNE and CLÆS DYRBYE: Admittance of bars. 1978.
- R 97. DYRBYE, CLÆS: Dynamic systems with sinusoidal mode shapes. 1978.
- R 98. ANDRESEN, CLAUD: Bjælker og søjler med åbne, tyndvæggede tværsnit. 1978.
- R 99. RIBERHOLT, H.: Eingeleimte Gewindestangen. 1978.
- R 100. PEDERSEN, C.: Opbøjet længdearmering som forskydningsarmering. 1978.
- R 101. JENSEN, J.F., M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Nogle plasticitetsteoretiske bjælkeløsninger. 1978.
- R 102. JENSEN, J.F., C. PEDERSEN, M.W. BRÆSTRUP, F. BACH og M.P. NIELSEN: Rapport over forskydningsforsøg med 6 spændbetonbjælker. 1978.
- R 103. JENSEN, J.F., V. JENSEN, H.H. CHRISTENSEN, F. BACH, M.W. BRÆSTRUP and M.P. NIELSEN: On the behaviour of cracked reinforced concrete beams in the elastic range. 1978.
- R 104. ANDERSEN, ERIK YDING: Konstruktionsovervågning med akustisk emission. Prøvebelastning af landevejsbro. 1979.
- R 105. FREDSGAARD, SØREN SKYTTE: Ligevægtselementer i de finite elementers metode. Formulering og beregningsgang. 1979.
- R 106. AGERSKOV, HENNING: Tests on high-strength bolted T-stub connections. 1979.
- R 107. KIRK, JENS: Direkte beregning af imperfekte skalkonstruktioner. 1979.
- R 108. Resumeoversigt 1978. Summaries of papers 1978. 1979.
- R 109. BRØNDUM-NIELSEN, TROELS: Stress analysis of concrete sections under service load. 1979.
- R 110. BRÆSTRUP, M.W.: Effect of main steel strength on the shear capacity of reinforced concrete beams with stirrups. 1979.
- R 111. BRINCKER, RUNE: Murede vægges tværbareevne. En undersøgelse af murværks fysiske egenskaber. 1979.
- R 112. GIMSING, NIELS J.: Analytisk undersøgelse af materialforbruget for plane kabelsystemer med ensformig fordelt belastning. 1979.
- R 113. MADSEN, HENRIK OVERGAARD: Load models and load combinations. 1979.
- R 114. RIBERHOLT, H. and P. HAUGE MADSEN: Strength distribution of timber structures. Measured variation of the cross sectional strength of structural lumber. 1979.

Abonnement 1.7.1979 - 1.7.1980 inden for Danmark kr. 40.-.

Subscription rate 1.7.1979 - 1.7.1980 D.Kr. 60.-.